**مجلة تنمية الرافدين**

تـنمية الرافديـن ٨٠ (٢٧) ٢٠٠٥
ص ص[٩١-١٠٣]

# بعض طرائق المقدرات التقليدية ومقدر بيز لمعلمات نموذج الانحدار الخطي العام (دراسة مقارنة مع تطبيق في مجال طبي)(*)

**الدكتور صفاء يونس الصفاوي**
استاذ مساعد/قسم الاحصاء
جامعة الموصل/كلية علوم الحاسبات والرياضيات

**عمار حازم طه**
ماجستير
جامعة الموصل/كلية علوم الحاسبات والرياضيات

## المستخلص

تم في هذا البحث مقارنة بين المقدرات الاعتيادية (الكلاسيكية) والمقـدرات البيزيـة، إذ تـم اختيار طريقتيـن من الطرائـق الكلاسيكيـة وهـي طريقـة المربعـات الـصغـرى الاعـتياديـة Ordinary Least Squares Method (وطريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method) (وفي التقديرات البيزية تناولنا طريقة بيز في حالة اعتماد دالة أولية غير معلوماتية Non-Informative Prior Density Function فقد تبين ان المقدرات لمعلمات نموذج الانحدار تكون متساوية في طريقتي المربعات الصغرى وطريقة الإمكان الأعظم وعندما يكون توزيع البـواقي طبيعيا، في حين كانت طريقة بيز هي أكفأ الطرق في التقدير من الطرق الاعتيادية.

## مقدمة

يشهد العالم تطورا متسارعا في جميـع مجـالات الحياة ويعد علم الإحصـاء (الراوي ،١٩٨٧) من العلوم المهمة لما له مـن دور مهـم وبـارز فـي تحليـل واستخراج النتائـج لمختلف البحـوث والدراسات في شتى المجالات، كما يستخدم مجموعة من الطرائق والوسائل والقواعد والقـوانين المستندة إلى التحليل المنطقي لقياس وتحليل الظواهر والحقائق واستخلاص النتائج.

كما يعد تحليل الانحدار جزءا مهما من علم الإحصاء وأسـلوبا مـن أسـاليب الإحصاء التطبيقي عند دراسة الظواهر كافة، إذ يحـدد بوضـوح العلاقـة بـين المتغيرات على هيئة معادلة ويستدل من تقدير الاستجابة والتنبؤ بها بما يفيد كثيرا في التخطيط والتنمية واتخاذ القرارات الرصينة حولها .

إن تقدير معلمات أي نموذج انحدار هو تفسيـر للعلاقة بين متغير الاسـتجابة والمتغير التوضيحي بصيغة رياضية تقريبية، وهنالك طرائـق مختلفـة لتقـدير معلمات نموذج الانحدار الخطي باعتماد أسلوب المدرسـة التقليدية، منهـا مـا يعتمد على معلومات العينـة المشاهدة فقط (طريقة الإمكان الأعظـم، طريقـة المربعات الصغرى، وغيرها) .

(*) البحث مستل من اطروحة الماجستير الموسومة "بعض طرائق المقدرات التقليدية ومقدر بيـز لمعلمـات نمـوذج الانحدار الخطي العام" جامعة الموصل ،كلية علوم الحاسبات والرياضيات، قسم الاحصاء.

تاريخ التسلم ٢٠٠٥/٥/٨ ________ تاريخ قبول النشر ٢٠٠٥/٧/١٩

أما أسلوب المدرسة البيزية فقد تضمن طرائق مختلفة لتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي تختلف باختلاف نوع دالة الكثافة الاحتمالية الأولية الممثلة للمعلومات السابقة لمعلمات الانحدار المجهولة، ففي حالة عدم توافر معلومات سابقة (قليلة المعلومات) حول تلك المعلمات يستخدم أسلوب بيز باعتماد دالة أولية غير معلوماتية في عملية التقدير التي تعكس كلا من معلومات العينة المشاهدة والمعلومات السابقة، فضلا عن ذلك نلاحظ أن المدرسة البيزية قدمت أسلوبا آخر يدعى (أسلوب بيز التجريبي) الذي يمكن استخدامه لتقدير معلمات الانحدار الخطي المجهولة في حالة عدم إمكانية صياغة المعلومات السابقة حول معلمات الانحدار على شكل دالة كثافة احتمالية معينة.

**هدف البحث**

يهدف البحث إلى إجراء دراسة مقارنة بين طرائق التقدير الاعتيادية والبيزية لتقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي، مما دفعنا للبحث عن الأسلوب الأمثل والطريقة المثلى للوصول إلى أفضل طريقة في التقدير، وذلك باستخدام الكفاءة النسبية معيارا للمقارنة مع التعرف على خصائص مقدرات كل طريقة تقدير.

**الجانب النظري**

**١. مقدمة في تحليل الانحدار**

يهتم علم القياس الاقتصادي بدراسة الظواهر الاقتصادية بطريقة كمية من خلال تحليل البيانات والتعرف على طبيعة العلاقة بين المتغيرات وقياس تلك العلاقة رقميا وتتطلب أية دراسة قياسية لظاهرة معينة ضرورة تحديد العوامل المؤثرة في تلك الظاهرة وصياغة العلاقة بين هذه العوامل في صورة نموذج قياسي يعبر عنها.

ويعرف تحليل الانحدار Regression Analysis بشكل عام بأنه مقياس رياضي لمتوسط العلاقة بين متغيرين أو أكثر بدلالة وحدات قياس المتغيرات التوضيحية في العلاقة وغالبا ما تسمى العلاقات من هذا النوع بنماذج الانحدار .

وينقسم تحليل الانحدار إلى قسمين رئيسين هما الانحدار الخطي والانحدار اللاخطي Linear Regression and Non-Linear Regression.

**٢.الانحدار الخطي العام**

يقتصر استخدام نموذج الانحدار الخطي البسيط على تحليل العلاقة بين متغير الاستجابة وعلاقته بمتغير توضيحي واحد، ولكن هنالك دراسات تتطلب وضع متغير الاستجابة بوصفه دالة لأكثر من متغير توضيحي واحد، مثال ذلك تحليل الطلب على سلعة استهلاكية معينة بوصفها دالة للسعر والدخل، فضلاً عن ذلك أسعار السلع البديلة وكذلك الحال عند دراسة دالة الإنتاج بوصف الإنتاج دالة للعمل وراس المال المستثمر، مثل هذه الدراسات تغطى بوساطة النموذج الخطي العام، والأسلوب الأخير هذا ما هو إلا عبارة عن امتداد طبيعي للنموذج الخطي البسيط وبذلك يمكن اعتماد الأسس المتبعة نفسها في تحليل نموذج الانحدار الخطي البسيط .

نفرض أن متغير الاستجابة (Y) دالة خطية إلى (k) من المتغيرات التوضـــيحية ( $X_1, X_2, ..., X_k$ ) فان نموذج الانحدار الخطي المتعدد يمكن أن يأخذ الصيغة :

$$\mathrm{Y_i} = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + u_i \qquad ...(1)$$

ولعينة حجمها (n) من المشاهدات وإضافة حد الخطأ يمكن التعبير عن النموذج المذكور لكل مشاهدة من المشاهدات فنحصل على (n) من المعـــادلات باســـتخدام المصفوفات والمتجهات وبالشكل الآتي :

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & . & . & . & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & . & . & . & X_{2k} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & . & . & . & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ . \\ U_n \end{bmatrix} \qquad ....(2)$$

أي أن :

$$\underline{Y} = \underline{X\beta} + \underline{U} \qquad ...(3)$$

$\underline{Y}$: تمثل متجهاً لمشاهدات متغير الاستجابة ذا رتبة (n x 1).

X : تمثل مصفوفة لمشاهدات المتغيرات التوضيحية ذات رتبة [(k + 1) n x ]

$\underline{\beta}$ : تمثل متجها لمعلمات النموذج الخطي المطلوب تقديرها ذا رتبة ([k + 1 x 1 ])

$\underline{U}$ : تمثل متجها للأخطاء العشوائية وذا رتبة (n x 1).

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + ... + \beta_k X_{1k} + U_1 \\ \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + ... + \beta k X_{2k} + U_2 \\ . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \\ \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + ... + \beta_k X_{nk} + U_n \end{bmatrix} ...(4)$$

أما حـــاصـــل ضـــرب المصفـــوفـــة ( $X'$ ) في (X) ينتـــج مصفوفـــة متماثلـــة ذات [(k + 1) x (k + 1)] وبالشكل الآتي :

$$X'X=\begin{bmatrix}1 & X_{11} & . & . & . & X_{1k}\\ 1 & X_{21} & . & . & . & X_{2k}\\ . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & .\\ 1 & X_{n1} & . & . & . & X_{nk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & . & . & . & 1\\ X_{11} & X_{21} & . & . & . & X_{n1}\\ . & . & & & & .\\ . & . & & & & .\\ . & . & & & & .\\ X_{1K} & X_{2K} & . & . & . & X_{nK}\end{bmatrix}.$$

$$=\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & . & . & \sum_{i=1}^{n} X_{ik}\\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X^2{}_{i1} & . & . & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}\ X_{ik}\\ . & . & & & .\\ . & . & & & .\\ . & . & & & .\\ \sum_{i=1}^{n} X_{1k} & \sum_{i=1}^{n} X_{ik}\ X_{i1} & . & . & \sum_{i=1}^{n} X^2{}_{ik}\end{bmatrix} \quad ...(5)$$

### ٤ . طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية Ordinary Least Squares Method

تسمى أيضا بالمربعات الصغرى الكلاسيكية (كاظم ومسلم ،٢٠٠٢) وتعد هذه الطريقة من الطرائق الواسعة الاستخدام في التطبيقات الإحصائية، وتعتمد على وجود علاقة بين متغيرين أو أكثر، ويستند مبدأ هذه الطريقة إلى إيجاد ذلك الخط المستقيم الذي يتخلل نقاط الشكل الانتشاري بالشكل الذي يجعل مجموع مربعات أبعاد النقاط عنه أقل ما يمكن، أي تحديد قيمة (β) التي تجعل هذا المجموع أقل ما يمكن في حالة الانحدار الخطي المتعدد، و عملية تقدير العلاقة الخطية بين عدة متغيرات أحدهما متغير الاستجابة والباقي متغيرات توضيحية يعتقد أنها تؤثر في متغير الاستجابة، أما تقدير المعلمات بشكل عام تكون معادلة الانحدار في حالة (k) من المتغيرات التوضيحية بالشكل الآتي :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta k\ X_{ik} + U_i \quad ...(6)$$

وفي حالة متغير توضيحي واحد فان :

$$U_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i \quad ...(7)$$

وبتربيع الطرفين ثم جمع كل طرف لـــ (n) من المشاهدات تنتج دالة المربعات الصغرى وأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة الى $(\beta_0)$ مرة وبالنسبة الــى $(\beta_1)$ مــرة

أخرى وجعلها مساوية للصفر نحصل على المعادلات الطبيعية ثم يتم حلها لايجاد معلمات نموذج الانحدار بوساطة الصيغة الآتية :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y) \quad \ldots (8)$$

أما مصفوفة التباين والتباين المشترك لـ ( $\beta$ ) فتكون بالشكل الاتي :

$$Var - \text{cov}\ (\hat{\beta}) = [(X'X)^{-1}\sigma^2] \ldots (9)$$

**٥. طريقة الإمكان الاعظم (Maximum Likelihood Method)**

هي إحدى الطرائق لتقدير المعلمات، وتعد هذه الطريقة من الطرائق المهمة لتقدير المعلمات (Anderon and Bancroft , 1952)، لأنها تحتوي على خصائص جيدة وكثيرة. ويمكن تعريفها بأنها قيم المعلمات التي تجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى، وتستخدم هذه الطريقة لتقدير معلمات نموذج الانحدار عندما يمتلك متغير الخطأ العشوائي لهذه النماذج توزيعا احتماليا معروفا، فإذا كان توزيع متغير الخطأ العشوائي لنموذج الانحدار المدروس يتوزع توزيعا طبيعيا فتقدير معلمات الانحدار ( $\beta$ ) بهذه الطريقة يكون مساويا لتقدير هذا المتجه بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية، و دالة الإمكان التي هي عبارة عن دالة احتمالية مشتركة لـ(n) من المشاهدات العشوائية ( $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ) مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة احتمالية معلومة ( $f(X, \beta$ ) ويرمز لدالة الإمكان (Harrison , and Mike.,1989) يرمز لها بالرمز (L) على انها الدالة المشتركة أي أن :

$$L(\beta) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n \mid \beta)$$

وفي حالة كون المتغيرات العشوائية مستقلة تكتب بالصورة الآتية :

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \beta)$$

$$L(\beta) = f(X_1, \beta).f(X_2, \beta) \ldots f(X_n, \beta) \ldots.(10)$$

وفي أكثر الأوقات يمكن إيجاد مقدر الإمكان الأعظم باستخدام الخطوات الآتية:

١. نجد دالة الإمكان .
٢. نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان .
٣. نجد المشتقة بالنسبة لـ ( $\beta$ ) .
٤. نساوي المشتقة بالصفر . $\dfrac{\partial \ln L(\beta)}{\partial \beta} = 0$

٥.وبحل هذه النتيجة نحصل على مقدر الإمكان الأعظم .

وفي حالة وجود متغير توضيحي واحد ولعينة عشوائية حجمها (n) يأخذ متغير الاستجابة المشاهدات الآتية $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$، ودالة الكثافة لكل مشاهدة من مشاهدات هذه العينة يمكن أن توضع بدلالة المعالم المقدرة من العينة $(\beta_0, \beta_1, \sigma_u^2)$، وأن قيم متغير الاستجابة مستقلة الواحدة عن الأخرى، كما ورد في الفروض السابقة، من هنا فان دالة الكثافة المشتركة تكون مساوية إلى حاصل ضرب الاحتمالات المنفردة (كاظم ومسلم ، ٢٠٠٢) وبالشكل الآتي :

$$\Pr(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \;\; \beta_0, \beta_1, \sigma^2) = (2\prod \sigma_u^2)^{-\frac{n}{2}} \exp - \left( \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2}{2\sigma_u^2} \right) \quad \ldots (11)$$

ولغرض تقدير معالم العلاقة المذكورة يستوجب تحويلها إلى الشكل الخطي ويتم ذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفيها ولجعل دالة الإمكان بأكبر احتمال ممكن يستوجب أخذ مشتقتها الجزئية الأولى للمعالم كافة المطلوب تقديرها ومساواتها بالصفر تنتج لدينا المعادلات الطبيعية التي يمكن حلها لايجاد معلمات نموذج الانحدار وكما يأتي :

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \quad \ldots (12)$$

$$or \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} + \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} Xi \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \quad \ldots (13)$$

من الصيغة التقديرية للحد الثابت والميل الحدي المذكورة سابقا يتضح أن تقديرات (OLS مطابقة تماما لتقديرات (M L) أي أن :

$$\hat{\beta}_{(ML)} = \hat{\beta}_{(OLS)} \quad \ldots (14)$$

كذلك الحال في الانحدار الخطي المتعدد وباستخدام أسلوب المصفوفات تكون:

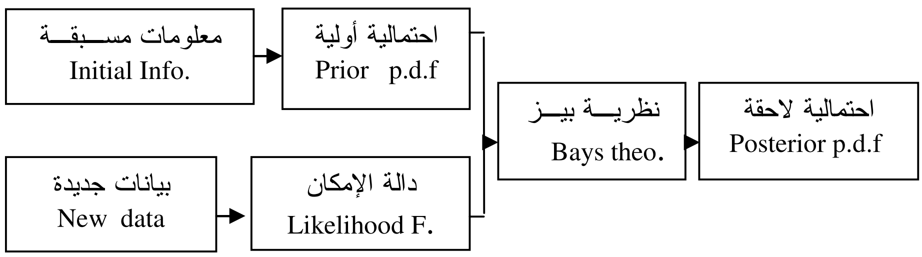
$$\hat{\beta}_{(ML)} = (X'X)^{-1} X'Y \qquad \dots (15)$$

علما أن العلامة (ML) وضعت على موجه المعالم المطلوب تقـدير ها، وذلـك للإشارة إلى كونها مقدرات الإمكان الأعظم، إذ أنه من خلال المقارنة يمكن إثبـات بان مقدرات المربعات الصغرى تكافئ تماما مقدرات دالة الإمكان الأعظم .

**٥. مفهوم نظرية بيز**

يركز أسلوب بيز على التقدير بشكل عام على استخدام معلومات مسبقة حـول المعلمات المجهولة $(\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ المطلوب تقديرها، على اعتبار أن هذه المعلمات متغيرات عشوائية وليست كميات ثابتة، ويضاف على تلـك المعلومـات المسبقة معلومات العينة المشاهدة، إذ تمثل تلك المعلومات على شكل دالة احتماليـة أولية (Prior p.d.f). ويمكن أن نعرفها بأنـها الدالة التي تمثل كـل المعلومـات والخبرات حول المعلمات المراد تقديرها والتي تم التوصل إليها مسبقا من خـلال التحليل أو المراقبة لتلك المعلمات. أما دالة التوزيع الاحتمالي لمشاهدات العـينة الحالية (Y) فتعتمد على المعالم $(\theta)$ ويرمز لها $f(Y \mid \theta)$ .

إن مقدر بيز لأي معلمة يعتمد علـى دالتـين الأولـى تعـرف بدالـة الكثـافة الاحـتماليـة اللاحـقـة (Posterior p.d.f) والثانية دالة الخسارة (Loss function) فدالة الكثـافة الاحتماليـة اللاحقة يمكن تعريفها بأنها دالة تمثل كـل المعلومـات حول المعلمات المراد تقديرها بعد مشاهدتها لمعلومات العينة الحالية وبعبارة أخرى إنها تركيب بين المعلومات الأولية وبيانات العينة الحالية ويمكن توضيـح ما تقدم من خـلال المخطط (عـبـودي، ١٩٩٦) الآتي :




**مخطط انسيابي لدالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة**

يمكن الحصول على مقدرات معالم نموذج الانحدار الخطي باعتماد دوال الكثافة الأولية وبالشكل الآتي :

١. دالة الكثافة الأولية غير المعلوماتية (القليلة المعلومات) .

٢. دالة الكثافة الأولية المعلوماتية (ذات المعلومات الغنية) .

٣. دالة الكثافة الأولية المعتمدة على عينة سابقة .

٤. دالة الكثافة الأولية المرافقة الطبيعية .

وسيتم استخدام دالة الكثافة الأولية غير المعلوماتية فقط .

### ٦. دالة الكثافة الأولية غير المعلوماتية (Noninformative prior distribution function)

يمكن استخدام هذه الدالة عندما تكون المعلومات المتوافرة عن معلمات نمــوذج الانحدار غير كافية أو عدم توافر تلك المعلومات نهائيا، عندئذ يتبع الاسلوب الذي اقترحه Jeffry، إذ اقترح قاعدتين لاختبار الكثافة الاحتمالية الأولية وعلــى النحــو الآتي :

القاعدة الأولى : إذا كانت المعلمة المراد تقديرها $(\theta)$ تمتلك قيمــة فــي مجــال لانهائي $(-\infty, \infty)$ فدالة الكثافة الاحتمالية الأولية تؤخذ كتوزيع منتظم .

القاعدة الثانية : إذا كانت المعلمة المراد تقديرها $(\theta)$ تمتلك قيمــة فــي مجــال لانهائي $(0\ ,\infty)$ فدالة الكثافة الاحتمالية الأولية تؤخــذ علــى أنهــا توزيــع لوغاريتمي منتظم .

وبما أن مشاهدات المتغير $(Y_i)$ مستقلة في ما بينــها فيمكــن إيجـــاد دالـــة الإمــكان Likelihood function للمشاهدات وبالشكل الآتي :

$$L(\beta_0, \beta_1, \sigma_u^2) = \prod_{i=1}^{n} f(Y_i / X_i, \beta_0, \beta_1, \sigma_u^2)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\Pi})^n \sigma_u^n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2\right] \qquad \ldots(16)$$

وباستخدام ثابت التناسب فان :

$$L \propto \frac{1}{\sigma_u^n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2\right] \qquad \ldots(17)$$

أما دالة الكثافة الاحتمالية الأولية غير المعلوماتية للمعــالم $(\beta_0, \beta_1, \sigma_u^2)$ فنحصل عليها من خلال تطبيق قاعدة Jeffry وبالشكل الآتي:

$$\left.\begin{array}{l} F(\theta) = [I_x(\theta)]^{1/2} \\ f(\beta_0) \propto cons\tan t \qquad -\infty < \beta_0 < \infty \end{array}\right\} \ldots(18)$$

$$f(\beta_1) \propto constant \qquad -\infty < \beta_1 < \infty$$

$$f(\sigma_u) \propto \frac{1}{\sigma_u} \qquad 0 < \sigma_u^2 < \infty \qquad \ldots (19)$$

وتجدر الإشارة هنا إلى أن الدالة الأولية التي يتم الحصول عليها على وفق اسلوب Jeffry تعد دالة غير تامة Improper ، لان تكامل هذه الدالة في مجالها لايساوي واحداً ولكن في حالة دمجها مع دالة الإمكان نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة التي تكون تامة Proper.

وبتطبيق نظرية بيز من خلال دمج الصيغة (17) مع الصيغة (19) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة اللاحقة لمعلمات نموذج الانحدار وبالشكل الآتي:

$$f(\beta_0,\beta_1,\sigma_u \mid Y) \propto \frac{1}{\sigma_u^{n+1}} \exp[-\frac{1}{2\sigma_u^2}\sum_{i=1}^{n}(Yi-\beta_0-\beta_1 Xi)^2 ] \quad \ldots (20)$$

$$-\infty < \beta_0 < \infty \quad , \quad -\infty < \beta_1 < \infty \quad , \quad 0 < \sigma_u^2 < \infty$$

عادة ما تكون المعلمة $(\sigma_u)$ غير معلومة في الواقع التطبيقي، من هنا لابد من ايجاد الدالة اللاحقة للمعالم $(\beta_0 , \beta_1)$ ويتم باجراء التكامل للصيغة رقم (20) بالنسبة للمعلمة $(\sigma_u)$ فنحصل على ما يأتي :

$$f(\beta_0 , \beta_1 \mid Y) \propto [V S_e^2 + n(\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 +$$

$$2(\beta_0 - \hat{\beta}_0)(\beta_1 - \hat{\beta}_1)\sum_{i=1}^{n} X_i ]^{-\frac{n}{2}} \qquad \ldots (21)$$

$$\propto [V S_e^2 + (\beta - \hat{\beta})' X' X (\beta - \hat{\beta})]^{-n/2} \quad \ldots (22)$$

$$-\infty < \beta_0 < \infty \quad , \quad -\infty < \beta_1 < \infty$$

والصيغة رقم (22) تمثل توزيع (t) ثنائي المتغير (t – Bivariate)

وبإجراء التكامل بالنسبة للمعلمة $(\beta_1)$ نحصل على الدالة الاحتماليــة الحديــة اللاحقــة للمعلمــة $(\beta_0)$ وبالشكل الآتي :

$$f(\beta_0 \mid Y) \propto \left( V + \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{S_e^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2} (\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2 \right)^{-\frac{V+1}{2}} \qquad \text{L} \ (23)$$

والصيغة رقم (23) تمثل دالة (Student-t) التي يمكن تحويلها بالشكل الآتي :

$$\left[ \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{S_e^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2} \right]^{\frac{1}{2}} (\beta_0 - \hat{\beta}_0) \approx t_v \qquad \text{L} \ (24)$$

إذ إن $(t_v)$ هي توزيع t بدرجة حرية (v) .

ومن الصيغة (24) نستنتج أن المعلمة $(\beta_0)$ لها توزيــع (t) بدرجــة حريــة (V) وبوسط حسابي $(\hat{\beta}_0)$ الذي يمثل مقدر بيز للمعلمــة $(\beta_0)$، باعتمــاد دالــة الكثافة الأولية غير المعلوماتية والذي يكون مساويا إلى مقدر طريقــة المربعــــات الصــغرى للمعلمــة نفسهــا أي أن :

$$\therefore \hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{i=1}^{n} Y_i - (\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \qquad ...(25)$$

وفيما يتعلق بالميل الحدي للمعلمة $(\beta_1)$ فيمكن الحصول على الدالة الاحتماليــة الحدية اللاحقة للمعلمة $(\beta_1)$ من خلال إجراء التكامل للصيغة (22) بالنسبة للمعلمة $(\beta_0)$ وبالشكل الآتي :

$$f(\beta_1 \mid Y) \propto \left( V + \frac{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_u^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2} (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \right)^{-\frac{V+1}{2}} \quad \ldots (26)$$

والصيغة (26) تمثل توزيع (Student-t) التي يمكن تحويلها بالشكل الآتي :

$$\left[ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{S_e^2} \right]^{\frac{1}{2}} (\beta_1 - \hat{\beta}_1) \approx t_v \quad \ldots (27)$$

من الصيغة (27) نستنتج أن المعلمة $(\beta_1)$ لها توزيع ( t) بدرجة حرية (V) وبمعدل $(\hat{\beta}_1)$ الذي يمثل مقدر بيز للمعلمة $(\beta_1)$، باعتماد دالة الكثافة الأولية غير المعلوماتية والذي يكون مساويا إلى مقدر طريقة المربعات الصغرى للمعلمة نفسها أي أن :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \quad \ldots (28)$$

أما في حالة الانحدار الخطي العام فيمكن اشتقاقها بطريقة الانحدار الخطي البسيط نفسها .

**الجانب التطبيقي**

يعرض هذا الجانب من البحث مقارنة طرائق التقدير الاعتيادية (طريقة المربعات الصغرى وطريقة الإمكان الأعظم) مع طرائق التقدير البيزية ولتوضيح كفاءة كل من هذه الطرق تم الاعتماد على قانون الكفاءة النسبية بوصفه معيارا إحصائيا، وقد جمعت البيانات من مركز الوفاء لعلاج وبحوث السكري، إذ تم الحصول على بيانات (150) مريضاً.

تم اعتماد ستة متغيرات أحدها متغير استجابة (Y) والباقي متغيرات توضيحية في ضوء البيانات المدروسة عن مرض السكري بالاعتماد على النموذج الآتي :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \beta_4 X_{i4} + \beta_5 X_{i5} + U_i$$

وبعد اختبار البيانات لفروض التحليل تم ايجاد مقدرات معلمات نموذج الانحدار بالطرائق المذكورة وكانت جميع النتائج متساوية بالتقدير أما بالنسبة لايجاد الكفاءة النسبية للطرائق فقد تم عمل جدول مقارنة وكانت لدينا النتائج كما في الجدول ١:

**الجدول ١**

**تباين مقدرات معلمات الانحدار**

| الطريقة | $\beta_0$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| VAR (OLS) | 872.038 | 48.068 | 72.34 | 0.754 | 0.156 | 86.225 |
| VAR (ML) | 872.038 | 48.068 | 72.34 | 0.754 | 0.156 | 86.225 |
| VAR (BAYES) | 592.559 | 45.451 | 69.582 | 0.720 | 0.1502 | 80.455 |

وباستخدام صيغة الكفاءة النسبية لمقارنة طريقة (OLS) مع طريقة (ML) تكون الصيغة بالشكل الآتي :

$$eff\ (\hat{\beta}_i) = \frac{\text{Var}\ (\hat{\beta}_i)\ \ in\ \ ML}{\text{Var}\ (\hat{\beta}_i)\ \ in\ \ OLS}$$

فاذا كانت النتيجة أقل من الواحد فهذا يعني أن التقدير بموجب (ML) أكثر كفاءة من التقدير بطريقة (OLS) والعكس صحيح، وأما إذا كانت النتيجة مساوية إلى الواحد الصحيح، فيدل ذلك على تساوي كفاءة الطريقتين، وبصورة اكثر اختصارا كلما كان التباين أقل كانت المقدرات اكثر كفاءة، وعليه فان طريقة بيز في حالة اعتماد دالة أولية غير معلوماتية تعد أكثر كفاءة من طريقة المربعات الصغرى وطريقة الإمكان الأعظم .

## الاستنتاجات والتوصيات

### الاستنتاجات

١. تتساوى مقدرات معلمات نموذج الانحدار الخطي بطريقة المربعات الصغرى وبطريقة الإمكان الأعظم.
٢. تكون طريقة بيز في حالة اعتماد دالة أولية غير معلوماتية أكثر كفاءة من طريقة المربعات الصغرى وطريقة الإمكان الأعظم.
٣. تتساوى كفاءة طريقة المربعات الصغرى مع طريقة الإمكان الأعظم.

### التوصيات

١. نوصي باستخدام طريقة بيز باستخدام دالة أولية غير معلوماتية عندما يكون التباين معلوماً وفي حالة عدم وجود معلومات مسبقة عن المعلمات المطلوب تقديرها.

٢. نوصي باستخدام طريقة بيز باستخدام دالة أولية معلوماتية في حالة وجود معلومات مسبقة أو قيود عن المعلمات المطلوب تقديرها.
٣. القيام بدراسة مماثلة باستخدام أساليب أخرى في التقدير لم يتم التطرق إليها في هذا البحث مثل طريقة المربعات الصغرى العامة General Least Squares Method وطريقة العزوم Moment Method وطريقة اقل مربع كاي Minimum - Chi –Square Method وطريقة أقل تباين Minimum Variance Method وعمل مقارنة بين الطرائق.
٤. التطرق إلى استخدام طريقة بيز في حالة اعتماد دالة أولية تعتمد على معلومات العينة وفي حالة اعتماد دالة أولية مرافقة طبيعية .

## المراجع

### اولاً -المراجع باللغة العربية

١. أموري هادي كاظم، باسم شيلبه مسلم، "القياس الاقتصادي المتقدم النظرية والتطبيق"، مكتبة دنيا الامل، بغداد، ٢٠٠٢.
٢. خاشع محمود الراوي، "المدخل إلي تحليل الانحدار"، مديرية دار الكتب للطباعة والنشر، جامعة الموصل، ١٩٨٧.
٣. عماد حازم عبودي، "استخدام أسلوب بيز في تقدير وتحليل معالم نماذج الانحدار مع تطبيق عملي"، رسالة دكتوراه في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، ١٩٩٦.

### ثانياً -المراجع باللغة الاجنبية

1. Anderon and Bancroft,”Statistical Theory in Research“ Mcgraw- Hill Book Company Newyork, 1952 .
2. Harrison, and Mike ”Baysian Forecasting and Dynamic Models” Springerverlag , New york, 1989 .

## Some Classical Estimation Baysian Methods and Estimation For Parameters of General Linear Regression Model (A Comparative Study With Medical Application)

### ABSTRACT

In this study a comparison between classical estimation and Baysian estimation have been done two ways of the classical method have been chosen namely (Ordinary least squares method) and (maximum likelihood method) and only one method of the Baysian estimation has been chosen namely (non-informative prior density function) as a result of this study we obtain the following result the estimation regression model is equal in all methods and Baysian estimation method is the more efficient way in estimation and (Ordinary least squares method) with (maximum likelihood method) are equal in efficiency.