كلية الإدارة والاقتصاد -جامعة الموصل   تنمية الرافدين العدد ٩٢ مجلد ٣٠ لسنة ٢٠٠٨

ص ص[٢٣٩ -٢٥٦]

سلاسل ماركوف بين النظرية والتطبيق في المجال الاقتصادي أو المالي أو الإداري

ريكان عبد العزيز أحمد

أستاذ مساعد -قسم الاحصاء

كلية الإدارة والاقتصاد -جامعة البصرة

rikan_ahmed@yahoo.com

المستخلص

من مقومات نمو وتقدم أي شركة أو مؤسسة تجارية الاستعانة بأساليب علمية حديثة تساعدها في السيطرة على أنشطتها المختلفة الحالية والمستقبلية، مما يجعلها مؤثرة ومنافسة في الحياة العملية، لذا جاءت هذه الدراسة لتوضح أحد تلك الأساليب الإحصائية والمتمثلة بسلاسل ماركوف من حيث إمكانية استخدامها في وصف الظاهرة الاقتصادية أو الإدارية أو المالية التي تواجه شركة أو مؤسسة تجارية وتحديد المشاكل المترتبة جراء تلك الظاهرة، ومن ثم تحديد نمو تلك الظاهرة في الوقت الراهن والمستقبلي، وذلك من خلال استخدام التحليل الإحصائي لأنموذج سلسلة ماركوف المبني للظاهرة والذي يعتمد بالأساس على مصفوفة الاحتمالات الانتقالية المقدرة لتلك الظاهرة والمتجه الوحيد. ولغرض توضيح الأسلوب بصورة مفيدة للقارئ تم التطبيق على بيانات سحبت من شركة خور الزبير تبين كيفية استخدام أسلوب سلاسل ماركوف في وصف الظاهرة والمتمثلة بمبيعات وإيرادات تلك الشركة من مادة اليوريا والسياسة المتبعة في توزيع تلك المبيعات على المراكز الرئيسة للبيع والتنبؤ بتلك السياسة في المستقبل القريب والبعيد، مما يساعد الشركة على معرفة المراكز التي تحقق أعلى إيراد لها من بين تلك المراكز ومعالجة المراكز التي تقل إيراداتها المستقبلية.

Markov Chains between Theory and Application In the Economic, Administrative or Financial Field

Rikan A.A. Ahmed
Lecturer
Department of Statistics
University of Basra

Abstract

One of the principles of the development or improvement of any company or commercial establishment is demanded by the help of new or modern scientific which can help it to control its different activities whether in the present or in the future. This makes it affective and competent in the business. The study above shows one of these methods which are clearly which are clearly with

تأريخ استلام البحث ٢٠٠٧/٦/٢٦   تأريخ قبول النشر ٢٠٠٧/١١/١١

Markov chains, especially in the possibility of its use when we want to describe the economic, administrative and financial phenomenon etc for the company or the commercial establishment. Markov chains can be used to state the problems which the company is faced and it can determine the development of these phenomena in the present and in the future by using statistical analysis for this chain in the phenomenon.

المقدمة

إن من أولويات أي شركة أو مؤسسة تجارية المحافظة على سياستها الربحية وتطويرها بتقدم الأزمنة مع مراعاة الأمور الأخرى التي لا تقل أهمية عن ذلك كالجودة والتسويق وإرضاء المستهلك وغيرهامن الأمور المهمة، غير أن الربح يقع في مقدمة تلك الأمور، وعلى هذا الأساس تنمو وتستمر تلك الشركة أو المؤسسة التجارية في البقاء والمنافسة مع مثيلاتها، ولا يتم ذلك إلاّ باستخدام طرائق ونماذج إحصائية تساعد تلك الشركات أو المؤسسات التجارية باتخاذ القرار الصائب حول تلك السياسة. وعلى هذا الأساس ازداد الاهتمام وبشكل ملحوظ بدراسة الأنظمة والأساليب التي تتغير مع الزمن بشكل عشوائي والتي لا يمكن السيطرة عليها بشكل تام أو التنبؤ بها أو بسلوكها المستقبلي بشكل مؤكد، وقد أطلق على النماذج الرياضية التي تمثل هذه الأنظمة أو الأساليب بالعمليات التصادفية(Stochastic Processes). ويعد أسلوب سلاسل ماركوف (Markov Chains) أحد التطبيقات العملية التصادفية التي تساعدنا في الوصف والمراقبة والتنبؤ بسياسة الشركة أو المؤسسة التجارية، وهو من الوسائل الإحصائية المعتمدة في بنائها على الأسلوب الاحتمالي، مما يزيد من دقة وصفها للظاهرة المدروسة.

هدف البحث

يهدف البحث إلى بيان الجانب التطبيقي والعملي للرياضيات الحديثة والمتمثلة بأسلوب سلاسل ماركوف من الدرجة الأولى في تمثيل الظواهر الاقتصادية أو الإدارية أو المالية، وكيفية الاستعانة بهذا الأسلوب في وصف تلك الظواهر والتنبؤ بسلوكها على المدى القريب والبعيد، ومن ثم إمكانية إظهار ذلك التطبيق بصورة عملية على سياسة مبيعات وإيرادات إحدى الشركات.

١. الجانب النظري

سنتناول في هذا المبحث بعض التعاريف الأساسية والصيغ الرياضية الخاصة بأسلوب سلاسل ماركوف التي تساعدنا في تهيئة بيانات الظاهرة وبناء الأنموذج بصورة صحيحة، وذلك حسب ما جاء عند الربيعي (2000) وNorman (1997) وMarius (1980) وكما يأتي:

١-١ العملية التصادفية (Stochastic Processes)

يقال لأية ظاهرة حقيقية تجرى في حيز معين كالزمن مثلاً بأنها عملية تصادفية إذا كانت حالات تلك الظاهرة في أي حيز من حيزها تمثل نتائج تجربة عشوائية تخضع لقوانين احتمالية، وعلى هذا الأساس تعرف العملية التصادفية رياضياً بأنها متتابعة (Sequence) من المتغيرات العشوائية (Random Variables) مؤشرة بالدليل t الذي يعود للمجموعة الدليلية T، وتكتب بالشكل $\{X(t)\,;t\in T\}$ أو بالشكل $\{X(t)\}$.

٢-١ فضاء الحالة وفضاء المعلمة (State Space and Parameter Space)

هنالك صفتان تشترك بهما أي عملية تصادفية هما فضاء الحالة(State Space) وفضاء المعلمة (Parameter Space).

- الحالة (State) للعملية التصادفية $\{X(t)\}$: هي أقل مجموعة من المعلومات عن الظاهرة في الحاضر أو الماضي بحيث يمكن من خلالها وصف السلوك المستقبلي للنظام.
- فضاء الحالة (State Space): هي المجموعة التي تضم جميع الحالات الممكنة للعملية التصادفية، ويقسم فضاء الحالة إلى نوعين، فضاء الحالة المتقطع الذي يحتوي على عدد محدد أو عدد معدود من الحالات، وفضاء الحالة المستمر الذي يحتوي على عدد غير محدد من الحالات.
- فضاء المعلمة (Parameter Space): إن العملية التصادفية $\{X(t)\}$ تتكون من مشاهدات تتغير بتغير دليل معين كالزمن أو أي دليل آخر، وهذا الدليل يسمى عادة بالمعلمة التي نرمز لها بالرمز t والذي تقع قيمته في مجموعة معينة يطلق عليها فضاء المعلمة والتي نرمز لها بالرمز T، ويقسم فضاء المعلمة كما هي الحال بالنسبة لفضاء الحالة على نوعين فضاء معلمة متقطع أو مستمر.

٣-١ سلاسل ماركوف (Markov Chains)

يقال للعملية التصادفية $\{X(t)\}$ ذات المعلمة المتقطعة أو المستمرة بأنها عملية ماركوف إذا حققت الخاصية الآتية والتي تعرف بخاصية ماركوف.

$$P(X_{t+1}=j|X_t=i,\ldots,X_0=k)=P(X_{t+1}=j|X_t=i)=P_{ij} \qquad \ldots (1)$$

بمعنى أن سلسلة ماركوف هي حالة خاصة من العملية التصادفية عندما يعتمد المستقبل على الحاضر فقط ولا يعتمد على الماضي، وتسمى بسلسلة ماركوف من الدرجة الأولى إذا حققت المعادلة (1) .

٤-١ سلاسل ماركوف من الدرجة الأولى

يقال لسلسلة ماركوف $\{X(t)\}$ بأنها من الدرجة الأولى إذا حققت الشروط الآتية:

- احتمال نتائج محاولة معينة يعتمد في أكثر الأحيان على نتائج المحاولة التي تسبقها مباشرةً.
- إذا كان احتمال أي محاولة ثابتاً بالنسبة للمحاولات الأخرى من السلسلة الزمنية.
- إذا كان عدد النتائج الممكن حدوثها محدوداً.

٥-١ الاحتمالات الانتقالية (Transition Probability)

إن العملية التصادفية بنيت على أساس انتقال الظاهرة من حالة إلى أخرى استناداً إلى قوانين إحتمالية معينة تدعى بالاحتمالات الانتقالية التي تمثل احتمال الانتقال خلال فترة زمنية معينة نرمز لها بالرمز P_{ij} ، أنظر المعادلة (1) التي تمثل إحتمال إنتقال العملية إلى الحالة j عند الزمن $t+1$، علماً بأنها كانت عند الحالة i عند الزمن t.

٢. وصف الظاهرة باستخدام سلاسل ماركوف وتقدير الاحتمالات الانتقالية

إن من أهم مكونات سلسلة ماركوف المصفوفة التي نضع فيها الاحتمالات الانتقالية للظاهرة بعد تقدير تلك الاحتمالات، وإن هنالك بعض الأسس التي يجب مراعاتها عند وصف الظاهرة وتقدير الاحتمالات الانتقالية لها ومنها مايأتي.

- أي مجتمع، لشركات أو مؤسسات تجارية أو مزارع أو أشخاص وغيرها يمكن تصنيفه إلى مجموعات أو حالات مختلفة بحيث أن هذه المجموعات أو الحالات يجب أن لا تكون متشابكة فيما بينها.
- التنقل بين هذه المجموعات أو الحالات عبر أي فترة زمنية يتم بشكل عشوائي تصادفي.
- ثبات احتمالات الانتقال خلال فترة الحساب والتنبؤ.

فعلى هذا الأساس لو كان لدينا معلومات أولية عن ظاهرة ما ولتكن y تم تصنيفها إلى n من الحالات (المجموعات) التي نرمز لها بالرمز $S_i\ , i=1,2,\ldots\ , n$، ومن ثم تمكنا من وضع حالات تلك الظاهرة بجدول يصف انتقال تلك الحالات فيما بينها وكما موضح في الجدول ١ .

الجدول ١

كيفية توزيع قيم الظاهرة y على n من الحالات S

الحالات	S_1	S_2	$\cdots$	S_j	$\cdots$	S_n	المجموع عند الفترة t
S_1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1n}	$y_{1\cdot}$
S_2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2j}	$\cdots$	y_{2n}	$y_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_i	y_{i1}	y_{i2}	$\cdots$	y_{ij}	$\cdots$	y_{in}	$y_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	y_{n1}	y_{n2}	$\cdots$	y_{nj}	$\cdots$	y_{nn}	$y_{n\cdot}$
المجموع عند الفترة $t+1$	$y_{\cdot1}$	$y_{\cdot2}$	$\cdots$	$y_{\cdot j}$	$\cdots$	$y_{\cdot n}$	$y=y_t=y_{t+1}$

إذ إن قيمة الظاهرة عند الحالة $S=i$ والحالة $S=j$ هي $y_{ij}\ ;i,j=1,2,\ldots,n$ ، وإن مجموع الظاهرة i عند الفترة t هو $y_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{n}y_{ij}\ ;i=1,2,\ldots,n$ ، وإن مجموع الظاهرة j عند الفترة $t+1$ هو $y_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{n}y_{ij}\ ;j=1,2,\ldots,n$ ، وإن المجموع الكلي للظاهرة هو $y=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_{ij}$ ، وعلى هذا الأساس يكون لدينا $y_{1\cdot}$ من الظاهرة في الحالة (المجموعة) الأولى S_1 و $y_{2\cdot}$ من الظاهرة في الحالة الثانية S_2 ، وهكذا حتى نحصل على $y_t=y_{1\cdot}+y_{2\cdot}+\cdots+y_{n\cdot}$ الذي يمثل مجموع الظاهرة y عند الفترة الزمنية t، مقابل ذلك يوجد $y_{t+1}=y_{\cdot1}+y_{\cdot2}+\cdots+y_{\cdot n}$ الذي يمثل مجموع الظاهرة y عند الفترة الزمنية $t+1$. وبعد وضع الظاهرة قيد الدراسة بالشكل الموضح في الجدول المذكور آنفاً نستطيع إنشاء مصفوفة ماركوف بعد تقدير الاحتمالات الانتقالية لها، وذلك بالاعتماد على العلاقة المقترحة من قبل Anderson & Goodman (1957) في حالة توفر فترة زمنية واحدة والمعرفة حسب المعادلة الآتية:

$$P_{ij}=\frac{y_{ij}}{y_{i\cdot}}\quad ;i,j=1,2,\ldots,n \qquad \ldots(2)$$

إن تفسير الاحتمال الناتج من المعادلة (2) يشابه الاحتمال الذي تم تعريفه في المعادلة (1)، وعلى هذا الأساس سنقوم بتحويل مشاهدات الظاهرة الموجودة في الجدول ١ إلى قيم احتمالية تمثل إحتمال إنتقال الظاهرة من حالة إلى أخرى خلال الفترة الزمنية t وكما مبين في الجدول ٢.

الجدول ٢
الاحتمالات الانتقالية المقدرة لقيم الظاهرة y

الحالات	S_1	S_2	$\cdots$	S_j	$\cdots$	S_n	المجموع
S_1	P_{11}	P_{12}	$\cdots$	P_{1j}	$\cdots$	P_{1n}	1
S_2	P_{21}	P_{22}	$\cdots$	P_{2j}	$\cdots$	P_{2n}	1
M	M	M	$\cdots$	M	$\cdots$	M	1
S_i	P_{i1}	P_{i2}	$\cdots$	P_{ij}	$\cdots$	P_{in}	1
M	M	M	$\cdots$	M	$\cdots$	M	1
S_n	P_{n1}	P_{n2}	$\cdots$	P_{nj}	$\cdots$	P_{nn}	1

لقد جرت العادة على وضع الاحتمالات الانتقالية للظاهرة على شكل مصفوفة تدعى بمصفوفة الاحتمالات الانتقالية (Transition Probability Matrix) التي تعد من المكونات الأساسية لسلسلة ماركوف، وعليه سوف يتم وضع الاحتمالات الانتقالية للظاهرة في الجدول ٢ على شكل مصفوفة إحتمال إنتقالي التي نرمز لها بالرمز P وكما موضح أدناه.

$$P = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \mathrm{M} \\ S_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & \mathrm{L} & S_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \mathrm{L} & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \mathrm{L} & P_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{L} & \mathrm{M} \\ P_{n1} & P_{n2} & \mathrm{L} & P_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathrm{L}\ (3)$$

ومن مميزات هذه المصفوفة ما يأتي:

- أي عنصر من عناصر المصفوفة P يجب أن تكون قيمته موجبة وبين الصفر والواحد.
- إن مجموع أي صف من صفوف المصفوفة P يجب إن يساوي الواحد الصحيح.
- إن المصفوفة P من الدرجة $n \times n$ أي يجب أن تكون مصفوفة مربعة.

٣. كيفية استخدام أنموذج سلسلة ماركوف للتنبؤ بالظاهرة قيد الدراسة

لقد بينا في المبحث السابق كيفية وصف الظاهرة المدروسة بأسلوب ماركوف، ومن ثم تقدير الاحتمالات الانتقالية لها، ولكن قبل البدء بالكلام عن أسلوب التنبؤ باستخدام سلاسل ماركوف لابد من معرفة بعض الشروط الرئيسة لحالات المصفوفة P التي تجعلها قادرة على التنبؤ بصورة دقيقة، ونستطيع إجمال هذه الشروط بالتعاريف الآتية، وذلك حسب ما جاء عند الربيعي (2000) وNorman (1997) وMarius (1980) وكما يأتي:

- سلسلة ماركوف غير قابلة للتجزئة (Irreducible) أو ذات الصف الواحد:

يقال لسلسة ماركوف إنها غير قابلة للتجزئة أو ذات الصف الواحد فقط إذا أمكن الانتقال من أي حالة من حالاتها إلى الحالات الأخرى وبالعكس عند أي زمن.

- **سلسلة ماركوف ذات العودة الموجبة (Positive Recurrent)**

يقال للحالة i في سلسلة ماركوف بأنها حالة عودة إذا وفقط إذا كان من المؤكد رجوع العملية للحالة نفسها والتي سبق وأن غادرتها، ويقال لهذه الحالة بأنها حالة عودة موجبة إذا كان متوسط عدد الزيارات لتلك الحالة $\mu_i < \infty$ إذ إن

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ii}^{n} \quad ; f_{ii}^{n} = P(y_n = i, y_r \neq i, r = 0,1,\ldots, n-1 | y_0 = i)\ldots \quad (4)$$

- **الحالة الدورية (Periodic)**

يقال للحالة i في سلسلة ماركوف بأنها حالة دورية إذا كان القاسم المشترك الأعظم لعدد الدورات التي تظهر فيها الحالة i أكبر من الواحد الصحيح، وعكس ذلك تسمى الحالة i حالة غير دورية.

- **الحالة الثبوتية (Ergodic)**

يقال للحالة i بأنها حالة ثبوتية إذا كانت غير قابلة للتجزئة وذات عودة موجبة وغير دورية.

إذا توافرت هذه الشروط الأربعة في سلسلة ماركوف نستطيع بعدها إيجاد التوزيع المستقر للسلسلة الذي يساعدنا في عملية التنبؤ بالظاهرة قيد الدراسة، وإن التوزيع المستقر (Stationary Distribution) لسلسة ماركوف يمكن أن نعبر عنه بمتجه احتمالي يطلق عليه المتجه الوحيد (Unique Vector) والذي سنرمز له بالرمز π، إذ إن عدد العناصر الموجودة في هذا المتجه تساوي عدد حالات سلسلة ماركوف للظاهرة المدروسة، وإن تلك العناصر هي قيم إحتمالية بحيث أن مجموعها يساوي الواحد الصحيح، ويتم استخراج المتجه الوحيد π بعدة طرائق وسنتناول في بحثنا طريقتين فقط.

- **الطريقة الأولى لحساب π**

يتم استخراج المتجه الوحيد π الذي يمثل التوزيع المستقر لسلسلة ماركوف، وذلك من خلال الاستمرار برفع المصفوفة P إلى قوة معينة حتى نحصل على تماثل بين أسطر المصفوفة P، وبذلك نحصل على المتجه π الذي يمثل أي سطر من أسطر المصفوفة المستقرة، وهنالك عدة طرائق تمكننا من رفع المصفوفة P إلى القوة المطلوبة منها.

$$P^n = P\,P^{n-1} \quad ; n \geq 1 \qquad \text{L}\ (5)$$

فعندما $n=1$ نحصل على $P^1 = P$ وعندما $n=2$ نحصل على $P^2 = P\,P^{2-1}$ وهكذا إلى أي قوة. بحيث أن القوة التي ترفع لها المصفوفة تدل على الفترة الزمنية لاحتمالات انتقال الظاهرة، فعندما تكون قيمة t تمثل الفترة الزمنية للسلسلة لسنة واحدة فإن P^1 تمثل إحتمالات إنتقال الظاهرة عند نهاية السنة الأولى، P^2 تمثل إحتمالات إنتقال الظاهرة بعد مرور سنتين وهكذا. أما إذا اعتبرنا أن t الفترة الزمنية للسلسلة لسنتين فإن P^1 إحتمالات إنتقال الظاهرة لسنتين، P^2 تمثل إحتمالات إنتقال الظاهرة بعد مرور أربع سنوات وهكذا. مع ملاحظة أن الدليل t يمكن أن يكون أي فترة زمنية تمر بها الظاهرة سواء كانت على شكل سنوات أو أشهر أو أيام أو ساعات وغيرها.

- **الطريقة الثانية لحساب π**

تعد هذه الطريقة من الطرائق الشائعة الاستخدام لحساب المتجه الوحيد πالذي يمثل التوزيع المستقر لسلسلة ماركوف، وذلك من خلال حل المعادلتين الآتيتين.

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_j\, P_{ij} \quad ; j \geq 1 \quad \Rightarrow \pi\, P = \pi \qquad \text{L}\ (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1 \qquad \text{L}\ (7)$$

مع مراعاة أن المعادلة (6) تضم عدداً من المعادلات تساوي عدد حالات السلسلة الممثلة للظاهرة، وأن عدد المعادلات اللازمة لاستخراج التوزيع المستقر بهذه الطريقة يجب أن يساوي عدد المعادلات المستخرجة من المعادلة (6) زائداً الشرط الضروري والمتمثل بالمعادلة (7). وبعد حل هذه المنظومة من المعادلات، وذلك باستخراج جذورها نحصل على المتجه الوحيد π الذي يمثل التوزيع المستقر للسلسلة، إذ تمثل عناصر هذا المتجه صفوف المصفوفة المستقرة التي سنرمز لها بالرمز L، وعندئذ نستطيع التنبؤ بالظاهرة قيد الدراسة، وذلك بالاعتماد على المصفوفة P والمتجه الوحيد π والمصفوفة المستقرة L وكما سنوضح ذلك في الجانب التطبيقي.

٤. الجانب التطبيقي

لغرض إظهار الجانب التطبيقي والعملي لسلاسل ماركوف في وصف سياسة شركة أو مؤسسة تجارية في إحدى جوانبها، تم الاعتماد على البيانات التي أخذت من الشركة العامة لصناعة الأسمدة الكيمياوية في منطقة خور الزبير لسنة ٢٠٠٤، والمتمثلة بمبيعات وإيرادات مادة اليوريا لتلك السنة. إن سياسة الشركة تتمثل في السيطرة على مبيعات منتج الشركة من مادة اليوريا لتحقيق أعظم إيراد لها خلال السنة، إذ يتم البيع عن طريق أربعة مراكز رئيسة للشركة وهي:

١. مركز مبيعات التجهيزات الزراعية y_1
٢. مركز مبيعات الفوسفات y_2
٣. مركز المبيعات التجاري (البيع المباشر) y_3
٤. مركز مبيعات التصدير y_4

ويقابل كل مركز مبيعات مركز إيرادات مقسمه حسب ما يأتي:

١. مركز إيرادات التجهيزات الزراعية x_1
٢. مركز إيرادات الفوسفات x_2
٣. مركز إيرادات التجاري (البيع المباشر) x_3
٤. مركز إيرادات التصدير x_4

٤-١ تهيئة البيانات لأنموذج ماركوف

لغرض وضع البيانات التي تم الحصول عليها بصورة مطابقة للأنموذج المستخدم، لابد من معرفة الأمور والأهداف التي ترغب الشركة في تحقيقها، لكي نحدد حالات الأنموذج بصورة دقيقة، ويكون الأنموذج مطابق للواقع العملي. حيث تهدف الشركة إلى معرفة المراكز التي تحقق أعظم ربح من المنتج الكلي لمادة اليوريا في المستقبل القريب والبعيد بغية السيطرة على مراكز المبيعات العالية لغرض تجهيزها باستمرار من الناتج الكلي لمادة اليوريا، والمراكز التي تحقق أرباحاً متدنية لغرض معالجتها. ولوضع بيانات تلك الشركة بصورة تطابق الأنموذج المستخدم في البحث وهو أنموذج سلسلة ماركوف، تم تقسيم السنة الواحدة إلى أربعة فصول لكل فصل ثلاثة أشهر وتم توزيع المراكز الأربعة للمبيعات والإيرادات أعلاه التي عدت حالات مصفوفة ماركوف للمبيعات والإيرادات على تلك الفصول، وبالاعتماد على الجدول ١ تم تفريغ مبيعات الشركة من مادة اليوريا وإيرادات تلك المادة، وكما مبين في الجدول ٣ و ٤ على التوالي.

الجدول ٣
مبيعات مادة اليوريا بالطن موزعة على الحالات (المراكز) الأربعة

الحالات	y_1	y_2	y_3	y_4	المجموع عند الفترة t
y_1	65064	16432.3	45622.93	46711.17	173830.4
y_2	50278	10350.9	17944	78048	156620.9
y_3	37412	12286.3	20950.1	37194.61	107843
y_4	63886	18541.7	12440.25	27855.19	122723.1
المجموع عند الفترة $t+1$	216640	57611.2	96957.28	189809	561017.4

الجدول ٤
إيرادات مادة اليوريا بالدينار موزعة على الحالات (المراكز) الأربعة

الحالات	x_1	x_2	x_3	x_4	المجموع عند الفترة t
x_1	2.41E+09	2.46E+08	1.46E+08	2.27E+09	5.07E+09
x_2	1.38E+09	1.85E+08	1.14E+09	1.57E+09	4.28E+09
x_3	1.8E+09	1.55E+08	2.4E+09	1.17E+09	5.53E+09
x_4	2.36E+09	2.79E+08	8.57E+08	8.46E+08	4.35E+09
المجموع عند الفترة $t+1$	7.96E+09	8.66E+08	4.55E+09	5.85E+09	1.92E+10

ولغرض تقدير الاحتمالات الانتقالية لمبيعات وإيرادات اليوريا سنعتمد على المعادلة (2)، وبعدها يتم وضع تلك الاحتمالات على شكل مصفوفة مشابهة للشكل العام (3) مع مراعاة أن درجة كل من مصفوفة المبيعات والإيرادات هي 4×4، وذلك لوجود أربع حالات (مراكز) للمبيعات والإيرادات. وإن مصفوفة الاحتمالات الانتقالية للمبيعات سنرمز لها بالرمز P_y ومصفوفة الاحتمالات الانتقالية للإيرادات سنرمز لها بالرمز P_x، وهما على التوالي بالشكل الآتي:

$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4$

$$P_y = \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{bmatrix} 3.74\text{E-}01 & 9.45\text{E-}02 & 2.62\text{E-}01 & 2.69\text{E-}01 \\ 3.21\text{E-}01 & 6.61\text{E-}02 & 1.15\text{E-}01 & 4.98\text{E-}01 \\ 3.47\text{E-}01 & 1.14\text{E-}01 & 1.94\text{E-}01 & 3.45\text{E-}01 \\ 5.21\text{E-}01 & 1.51\text{E-}01 & 1.01\text{E-}01 & 2.27\text{E-}01 \end{bmatrix} \quad \text{L (8)}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$P_x = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{bmatrix} 4.75\text{E-}01 & 4.86\text{E-}02 & 2.89\text{E-}02 & 4.47\text{E-}01 \\ 3.23\text{E-}01 & 4.32\text{E-}02 & 2.67\text{E-}01 & 3.67\text{E-}01 \\ 3.26\text{E-}01 & 2.81\text{E-}02 & 4.34\text{E-}01 & 2.12\text{E-}01 \\ 5.44\text{E-}01 & 6.43\text{E-}02 & 1.97\text{E-}01 & 1.95\text{E-}01 \end{bmatrix} \quad \text{L (9)}$$

يمكن تفسير القيم الواردة في المصفوفة P_y أو P_x كما يأتي:

إحتمال بقاء مبيعات اليوريا في مركز التجهيزات الزراعية y_1 عند الفترة الزمنية $t+1$، أي الوقت الذي يمثل نهاية الفصول الأربعة، علماً بأنها كانت عند المركز نفسه في الفترة الزمنية t ،أي الوقت الذي يمثل بداية الفصول الأربعة هو $P_{y_1y_1} = 3.74\text{E - }01$. وإحتمال إنتقال مبيعات اليوريا من مركز التجهيزات الزراعية y_1 عند الفترة t إلى مركز مبيعات الفوسفات y_2 عند الزمن $t+1$ هو $P_{y_1y_2} = 9.45\text{E - }02$. أما بالنسبة إلى إحتمال إنتقال مبيعات اليوريا من مركز المبيعات التجارية y_3 عند الزمن t إلى مركز مبيعات التصدير y_4 عند الزمن $t+1$ فهو $P_{y_3y_4} = 3.44\text{E - }01$. وهكذا الحال في تفسير بقية الاحتمالات الانتقالية داخل مصفوفة المبيعات P_y أو الاحتمالات الانتقالية لمصفوفة الإيرادات P_x .

٤-٢ التوزيع المستقر لمصفوفة المبيعات P_y والإيرادات P_x

لغرض حساب التوزيع المستقر لحالات المبيعات والإيرادات يجب على المصفوفتين P_y و P_x أن تحققا الشروط الأربعة التي تطرقنا إليها في المبحث(3) فضلاً عن ذلك يجب أن تكون رتبة كل مصفوفة من الدرجة الأولى والتي سيتم التطرق إليها عند اختبار الأنموذج.

بالنسبة للشرط الأول نلاحظ أن كلا المصفوفتين P_y و P_x يمكن التنقل بين أي حالتين من الحالات الأربع المكونة لهما من أول زيارة، أي أن $y_i \leftrightarrow y_j \;\&\; x_i \leftrightarrow x_j \;; i, j = 1,2,3,4$ ، مما يدل على أن المصفوفتين غير قابلتين للتجزئة وكل منهما ينتمي إلى صف واحد.

إن حالات المصفوفة P_y الأربع جميعها تكون ذات عودة موجبة، وذلك لأن متوسط عدد الزيارات μ_{y_i} للحالات الأربع يحقق الشرط $\mu_{y_i} < \infty$، وكذلك الحال بالنسبة للمصفوفة P_x فإن متوسط عدد الزيارات μ_{x_i} للحالات الأربع تكون $\mu_{x_i} < \infty$، أي أنها ذات عودة موجبة أيضاً وعليه يتحقق الشرط الثاني، والجدول ٥ يبين نتائج متوسط عدد الزيارات لكل حالة من حالات المصفوفة P_y و P_x على التوالي.

الجدول ٥

متوسط عدد الزيارات لحالات المبيعات μ_{y_i} ولحالات الإيرادات μ_{x_i}

الحالة i / متوسط الزيارة	1	2	3	4
μ_{y_i}	2.4595	8.952	5.3886	3.3768
μ_{x_i}	2.1463	19.9433	6.2414	3.0890

بالنسبة للشرط الثالث يلاحظ أن حالات كلا المصفوفتين P_y و P_x جميعها تكون غير دورية، وذلك لأن جميع احتمالات حالات المصفوفتين تكون موجبة من الدورة الأولى، مما يدل على أن القاسم المشترك الأعظم لعدد دورات أي حالة من حالات المصفوفتين هو الواحد الصحيح.

بتحقق الشروط الثلاثة المذكورة آنفاً لكلا المصفوفتين P_y و P_x فإن حالات المصفوفتين تكون ثابتة.

وبما أن كلا المصفوفتين حققت الشروط الأربعة السابقة الذكر، إذن نستطيع حساب التوزيع المستقر لهما، وذلك بحسب ما تم التطرق إليه في المبحث ٣ وكما يأتي:

- **الطريقة الأولى**

بالاعتماد على المعادلة (5) تم رفع مصفوفة الاحتمالات الانتقالية للمبيعات P_y إلى قوة حتى استقرت (تماثلت) أسطرها كافة إلى المتجه الوحيد π_y، إذ استقرت صفوف المصفوفة P_y عند القوة $n=9$، والمتجه الوحيد لهذه المصفوفة يعرف كما يأتي:

$$\pi_y = [0.4066 \quad 0.11179 \quad 0.18562 \quad 0.2961] \quad \ldots (10)$$

أما بالنسبة لمصفوفة الإيرادات P_x فقد استقرت صفوفها عند القوة $n=13$، والمتجه الوحيد لهذه المصفوفة يعرف كما يأتي:

$$\pi_x = [0.465912 \quad 0.050142 \quad 0.16022 \quad 0.323726] \quad \ldots (11)$$

- **الطريقة الثانية**

تم استخراج التوزيع المستقر (المتجه الوحيد) لمصفوفة المبيعات والإيرادات، وذلك بالاعتماد على المعادلتين (6) و(7) على التوالي وكما مبين أدناه.

بالنسبة لحالة المبيعات يتم استخراج التوزيع المستقر لها، وذلك من خلال حل المعادلتين (12) و(13) اللتين تقابلان المعادلتين (6) و(7) على التوالي، مع ملاحظة أن المعادلة (12) تحتوي أربع معادلات بعدد الحالات الموجودة في المصفوفة P_y، وعليه يكون عدد المعادلات التي تمكننا من حساب المتجه الوحيد π_y هي خمس معادلات، وبعد حلها واستخراج الجذور الأربعة لهذه المعادلات الخمس نحصل على المتجه الوحيد π_y لحالة المبيعات وهو مطابق لما موجود في المعادلة (10).

$$[\pi_{y_1}\pi_{y_2}\pi_{y_3}\pi_{y_4}]\begin{bmatrix} 3.74E-01 & 9.45E-02 & 2.62E-01 & 2.69E-01 \\ 3.21E-01 & 6.61E-02 & 1.15E-01 & 4.98E-01 \\ 3.47E-01 & 1.14E-01 & 1.94E-01 & 3.45E-01 \\ 5.21E-01 & 1.51E-01 & 1.01E-01 & 2.27E-01 \end{bmatrix} = [\pi_{y_1}\pi_{y_2}\pi_{y_3}\pi_{y_4}] \ldots (12)$$

$$\pi_{y_1} + \pi_{y_2} + \pi_{y_3} + \pi_{y_4} = 1 \quad \ldots (13)$$

وبالطريقة نفسها يتم استخراج التوزيع المستقر لمصفوفة الإيرادات، وذلك من خلال حل المعادلتين (14) و(15) اللتين تقابلان المعادلتين (6) و(7) على التوالي، ومع ملاحظة أن المعادلة (14) تحتوي أربع معادلات بعدد الحالات الموجودة في المصفوفة P_x، وعليه يكون عدد المعادلات التي تمكننا من حساب المتجه الوحيد π_x هي خمس معادلات، وبعد حلها واستخراج الجذور الأربعة لهذه المعادلات الخمس نحصل على المتجه الوحيد π_x لحالة الإيرادات، وهو مطابق لما تم التوصل إليه في المعادلة (11) وكما يأتي:

$$[\pi_{x_1}\pi_{x_2}\pi_{x_3}\pi_{x_4}]\begin{bmatrix} 4.75E-01 & 4.86E-02 & 2.89E-02 & 4.47E-01 \\ 3.23E-01 & 4.32E-02 & 2.67E-01 & 3.67E-01 \\ 3.26E-01 & 2.81E-02 & 4.34E-01 & 2.12E-01 \\ 5.44E-01 & 6.43E-02 & 1.97E-01 & 1.95E-01 \end{bmatrix} = [\pi_{x_1}\pi_{x_2}\pi_{x_3}\pi_{x_4}] \ldots (14)$$

$$\pi_{x_1} + \pi_{x_2} + \pi_{x_3} + \pi_{x_4} = 1 \quad \ldots (15)$$

مما تقدم نلاحظ تشابه النتائج التي تم الحصول عليها عند حساب التوزيع المستقر لحالات المبيعات والإيرادات باستخدام الطريقتين، غير أن الطريقة الثانية تعد الطريقة الامثل في الحساب.

٤-٣ استخدام الأنموذج للتنبؤ

نستطيع الاستعانة بمصفوفة الاحتمالات الانتقالية للمبيعات P_y والإيرادات P_x والمتجه الوحيد للمصفوفتين π_y و π_x على التوالي، لغرض التنبؤ بالظاهرة المدروسة خلال الفترة الزمنية التي نرغب بها، ولكن أولا يجب أن نعرف متجه التشكيل الابتدائي للمبيعات C_{yt} ومتجه التشكيل الابتدائي للإيرادات C_{xt} عند الزمن t والذي يمثل الزمن الابتدائي للفصول الأربعة ووفق الآتي:

$$C_{yt} = [173830.4 \quad 156620.9 \quad 107843 \quad 122723.1]$$

$$C_{xt} = [5.07E+09 \quad 4.28E+09 \quad 5.53E+09 \quad 4.35E+09]$$

إن التشكيل المتوقع لهذه المبيعات والإيرادات في الزمن $t+1$ والذي يمثل الزمن عند نهاية الفصول الأربعة، أي عند نهاية السنة يمكن الحصول عليه، وذلك بضرب المتجه الابتدائي للمبيعات C_{yt} أو الإيرادات C_{xt} المصفوفة الاحتمالات الانتقالية لكل متجه وكما يأتي:

المبيعات المتوقعة عند الزمن $t+1$ التي نرمز لها بالرمز C_{yt+1} يتم الحصول عليها من خلال العلاقة الاتية:

$$C_{yt+1} = C_{yt}P_y = [216640 \quad 57611.2 \quad 96957.28 \quad 189809]$$

أما الإيرادات المتوقعة عند الزمن $t+1$ والتي نرمز لها بالرمز C_{xt+1} يتم الحصول عليها من خلال العلاقة الآتية:

$$C_{xt+1} = C_{xt}P_x = [7.96E+09 \quad 8.66E+08 \quad 4.55E+09 \quad 5.85E+09]$$

يلاحظ أن متجه المبيعات المتوقع C_{yt+1} والإيرادات المتوقعة C_{xt+1} عند الزمن $t+1$ المستخرجان آنفاً يتطابقان مع ما هو موجود فعلاً في جدول المبيعات (3) و (4) عند الفترة $t+1$ على التوالي الذي تم الحصول عليه من الواقع العام للظاهرة، مما يدل على قدرة الأنموذج المستخدم في تمثيل الظاهرة المدروسة خير تمثيل. وهذه النتيجة تعني أن جميع المبيعات التي كانت موزعة على المراكز (الحالات) الأربعة في الزمن t انتقلت بمقادير متفاوتة فيما بينها عند الزمن $t+1$، إذ ازدادت مبيعات المركز الأول y_1 والرابع y_4 عند الفترة $t+1$ بمقدار 42809.61 طن و67085.08 طن من اليوريا عن الفترة الزمنية t على التوالي، من ناحية أخرى قلت مبيعات المركز الثاني y_2 والثالث y_3 عند الفترة $t+1$ بمقدار 99009.69 طن و10885.735 طن من اليوريا عن الفترة الزمنية t على التوالي، مما يدل على قوة الطلب على المركزين y_1 و y_4، وذهاب جزء من حصة المركزين y_2 و y_3 إليهما عند نهاية الفترة $t+1$، وإن هنالك ضعفاً كبيراً في التوزيع بالنسبة للمركزين y_2 و y_3.

وكـذلك الحــال بالنـسبة للإيـرادات المتوقعـة عنـد الـزمن $t+1$ ، إذ ازدادت إيرادات المركز الأول x_1 والمركز الرابع x_4 بمقدار $2.89E+09$ و $3.25E+08$ على التوالي عن الفترة الزمنية t ، وذلك بزيادة مبيعاتها وقلة إيرادات المركزين الثـاني x_2 والثالـث x_3 بمقـدار $3.42E+09$ و $9.82E+08$ علـى التـوالي عـن الفترة t وللسبب المذكور نفسه.

أما تشكيل المبيعات والإيرادات المتوقعة عند الزمن $t+2$، أي بعد مرور ثمانية فصول (السنة الثانية) فيمكن الحصول عليها بالطريقة الآتية:

متجه المبيعات المتوقع عند الزمن $t+2$.

$$C_{yt+2}=C_yP_y^2=[232026 \quad 64010 \quad 101535 \quad 163446]$$

أما متجه الإيرادات المتوقع عند الزمن $t+2$.

$$C_{xt+2}=C_xP_x^2=[8.73E+09 \quad 9.29E+08 \quad 3.59E+09 \quad 5.98E+09]$$

اذ يلاحظ على المتجهين المذكورين آنفاً بقاء مبيعات وإيرادات المركزين الأول والرابع مرتفعة والمركزين الثاني والثالث منخفضة عند الزمن $t+2$ عما كانت عليه في الزمن t .

وعليه فإن المعادلة (20) و(21) أدناه تمكننا من التنبؤ بالمبيعات أو الإيرادات عند أي فترة زمنية مرغوب بها وهما على التوالي كما يأتي:

$$C_{yt+n}=C_{yt}P_y^n \quad ;n=1,2,\ldots \qquad \ldots (20)$$

$$C_{xt+n}=C_{xt}P_x^n \quad ;n=1,2,\ldots \qquad \ldots (21)$$

أما بالنسبة للحالة المتوقعة على الأمد البعيد لمبيعات أو إيرادات الشركة عند بقاء النزعة الحالية للتوزيع بالنسبة للمراكز الأربعة فيمكن حسابهما وكما يأتي:

في حالة المبيعات:

$$C_{y\infty}=C_{yt}L_y=[228110 \quad 62666 \quad 104125 \quad 166117]$$

في حالة الإيرادات:

$$C_{x\infty}=C_{xt}L_x=[8.96E+09 \quad 9.64E+08 \quad 3.08E+09 \quad 6.22E+09]$$

إذ إن L_x , L_y مصفوفتان من الدرجة 4×4، وإن كل صف من صفوف المصفوفة L_y عبارة عن المتجه الوحيد π_y لحالة المبيعات، وكذلك الحال بالنسبة لمصفوفة L_x فإن كل صف من صفوفها عبارة عن المتجه الوحيد π_x لحالة الإيرادات، مع الملاحظة أيضاً بقاء سياسة زيادة مبيعات وإيرادات المركزين الأول والرابع على المركزين الثاني والثالث على الأمد البعيد في حالة بقاء سياسة الشركة مستمرة على ما كانت عليه عند بدء الفترة t في توزيع مادة اليوريا على المراكز الأربعة.

٥. اختبار صلاحية الأنموذج للتقدير

عند دراسة أي ظاهرة وذلك من خلال إنشاء أنموذج معين يعتقد بملاءمته لتلك الظاهرة، ثم استخدام ذلك الأنموذج في التقدير والتنبؤ واتخاذ القرارات المتعلقة بتلك الظاهرة، لابد من إجراء إختبار يبين مدى صلاحية ذلك الأنموذج في تمثيل الظاهرة المدروسة بصورة جيدة، ولا يتم ذلك إلاّ من خلال وضع فرضيات معينة على ذلك الأنموذج ومن ثم اختبار تلك الفرضيات للتأكد من سلامته.

في بحثنا هذا استخدمنا أنموذج سلاسل ماركوف من الدرجة الأولى لتمثيل الظاهرة والمتمثلة بمبيعات وإيرادات مادة اليوريا لشركة خور الزبير، ولغرض معرفة هل أن الأنموذج المستخدم يستطيع وصف الظاهرة أم لا لابد من عمل إختبار يبين لنا بأن المصفوفتين المقدرتين مصفوفة المبيعات P_y ومصفوفة الإيرادات P_x تمثلان سلسلة ماركوف من الدرجة الأولى أم لا؟ فإذا كان الجواب بالنفي فمعنى ذلك أن الأنموذج المستخدم في البحث لا يستطيع وصف الظاهرة المدروسة بصورة حقيقية، وعلى هذا الأساس سوف يتم صياغة الفرضية الخاصة بكل من أنموذج المبيعات والإيرادات وكما يأتي:

الفرضية الخاصة بأنموذج المبيعات

فرضية العدم H_0: إن سلسلة ماركوف المقدرة P_y من الدرجة صفر، ضد الفرضية البديلة H_1: إن سلسلة ماركوف المقدرة P_y من الدرجة الأولى.

الفرضية الخاصة بأنموذج الإيرادات

فرضية العدم H_0: إن سلسلة ماركوف المقدرة P_x من الدرجة صفر، ضد الفرضية البديلة H_1: إن سلسلة ماركوف المقدرة P_x من الدرجة الأولى.

اذ سيتم إختبار الفرضية الأولى باستخدام الاحصاءه المعرفة عند الربيعي (2000) وRobert (2000) وبالاعتماد على الجدول ٣ وكما موضح أدناه:

$$\lambda_y = 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \log \frac{y_{ij}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} y_{ij}\right)}{y_{i\cdot}\, y_{\cdot j}} \qquad \text{L (22)}$$

أما الفرضية الثانية والخاصة بالإيرادات فسيتم اختبارها بالاحصاءة المذكورة أعلاه ولكن بالاعتماد على الجدول ٤. مع ملاحظة أن الاحصاءة أعلاه تسلك وفق مربع كاي وبدرجة حرية $(m-1)$، إذ إن m تمثل عدد الحالات المقدرة في سلسلة ماركوف وهي4 في هذه الحالة. وبعد حساب قيمة الإحصاءة الخاصة بالفرضية

الأولى والتي تساوي$9912 = \lambda_y$ وقيمة الإحصاءة الخاصة بالفرضية الثانية والتي تساوي $\lambda_x = 1.98E + 11$، ومن خلال مقارنتهما بالقيمة الجدولية لتوزيع مربع كاي بدرجة حرية 3 ومستوى معنوية 0.05 نلاحظ أن القيمة الجدولية تساوي 7.81 وهي أصغر من القيمتين المحسوبتين λ_yو λ_x، وعليه يكون القرار برفض فرضية العدم وقبول الفرضية البديلة للفرضيتين أعلاه، أي أن كلا المصفوفتين P_y و P_x من الدرجة الأولى، وتمثلان الظاهرة المدروسة وأن أنموذج ماركوف استطاع تمثيل مبيعات وإيرادات الشركة من مادة اليوريا بصورة جيدة.

٦. الاستنتاجات

على ضوء ما تم التوصل إليه من نتائج عملية نستطيع ان نعطي بعض الاستنتاجات وكما يأتي:

- إن من أهم مزايا سلاسل ماركوف لو تمت مقارنتها بطرائق أخرى لوصف الظاهرة كالسلاسل الزمنية، أو طرائق الانحدار أو ما شابه ذلك من الطرائق، هي سهولة الحصول على التقديرات مقارنة بالطرائق أعلاه.
- لا يشترط الأنموذج المستخدم في عملية التحليل أن تكون البيانات تتبع توزيعاً معيناً عكس بعض النماذج الإحصائية الأخرى التي توجب إتباع البيانات إلى توزيع معين وإلاّ لا يتحقق التحليل.
- نستطيع استخدام أنموذج ماركوف في وصف أغلب الظواهر الاقتصادية أو الإدارية أو المالية أو الطبيعية وغيرها من الظواهر، بشرط ان يتم وضع بيانات الظاهرة بصيغة تلائم أنموذج سلاسل ماركوف، وخلاف ذلك سوف يتم الحصول على تقديرات غير دقيقة وغير ممثلة للظاهرة المدروسة تمثيلاً جيداً.
- إن أنموذج سلاسل ماركوف المستخدم يبين تأثير مجموعة مجتمعة من المتغيرات السببية على مبيعات وإيرادات الشركة من منتج اليوريا كسياسة احتكار بعض الجهات إلى المنتج، الظرف السياسي الذي يمر به البلد وتأثيره على مجال التصدير، التزام الشركة ببيع جزء من المنتج بأسعار ثابتة كمساهمة وطنية، السياسة الزراعية ومواسم الزراعة، التقنية الصناعية وتأخرها بسبب الظرف الراهن وغيرها من العوامل التي يجب على الشركة أن تأخذها في الاعتبار لغرض السيطرة على مبيعاتها.
- أظهرت نتائج التحليل أن مركز المبيعات الأول والرابع يحققان أعلى إيرادات على الأمد البعيد للشركة مقارنة بالمركزين الثاني والثالث إذ تقل إيراداتهما مما يدل على أن السياسة المتبعة في توزيع حصة الإنتاج على المراكز الأربعة من مادة اليوريا غير مربحة للشركة.
- إن توفر المعلومات الدقيقة عن احتياجات كل مركز من مراكز المبيعات الأربعة من حيث الطلب على مادة اليوريا يسهل للشركة توفير أعلى عائد لها خلال السنة، مما يسهل تجهيز تلك المراكز بالكمية المطلوبة في الوقت المناسب.

- من الضروري للشركة معالجة النقص في إيرادات المركزين الثاني والثالث إما بدمجهما بمركز واحد أو وضع تسهيلات مقدمة من الشركة للمركزين أو أي سياسة أخرى تسهم في رفع إيراداتهما.

المراجع

أولاً-المراجع باللغة العربية

١. الربيعي، فاضل محسن وعبد، صلاح حمزه،٢٠٠٠، "مقدمة في العمليات التصادفية" مديرية الطباعة والنشر بغداد.
٢. الربيعي، فاضل محسن، ١٩٩١، "المدخل إلى النماذج الاحتمالية" مطبعة الجامعة المستنصرية.

ثانياً-المراجع باللغة الأجنبية

1. Anderson, T.W. & Goodman, L.A., 1957, "Statistical Inference About Markov Chains", Ann. Math. Stat.
2. Marius Iosifescu, 1980, "Finite Markov Processes and Their Applications", John Wiley & Sons.
3. Norman, L. Johnson & N. Balakrishnan, 1997, "Advance in the Theory and Practice of Statistics", John Wiley & Sons.
4. Robert, B. & Magdalena, N, 2000, "Probability and Statistical Inference" John Wiley & Sons.