كلية الإدارة والاقتصاد -جامعة الموصل تنميـــة الرافـــدين العـــدد ٩٦ مجلـــد ٣١ لـــسنة ٢٠٠٩

ص ص[١٢١ -١٤٤]

البرمجة الخطية المتعددة الدوال

خالد عبدالله العلاف
مدرس مساعد - قسم العلوم المالية والمصرفية
كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة الموصل

المستخلص

تناول البحث التطورات الخاصة بالبرمجة الرياضية فيما يخص الانتقال من دالة هدف واحدة إلى تعددية دوال الهدف، والتي باتت تعرف بالبرمجة الرياضية المتعددة الدوال Multi-Objective Mathematical Programming (MOMP)**، وسنتناول بالتحديد أنموذج البرمجة الخطية المتعددة الدوال** Multi-Objective Linear Programming (MOLP) **ذات أسبقيات معجمية من حيث الصياغة وبناء الأنموذج الرياضي وطرائق الحل الخاصة به، وتم استخدام طريقة السمبلكس المعدلة متعددة المعايير ذات الوجهين**Two Phase R. M. S. M. **للنماذج الخطية كبيرة الحجم ذات القيود المتنوعة حاسوبياً وطريقة السمبلكس متعددة المعايير** M. S. M. **لحل المشاكل صغيرة الحجم يدوياً لغرض الوصول إلى الحل النهائي. وبالتطبيق على حالة دراسية تخص مشكلة قرار بثلاث دوال وتمتلك أسبقيات معجمية، الأولى والثالثة منها في حالة تعظيم والثانية في حالة تصغير، وبعد صياغة الأنموذج وإيجاد الحل النهائي الأمثل حاسوبياً تم تحليل النتائج والحصول على حل أمثل يوصف بأنه حل غير سائد ذي قيم ربحية مختلفة للدوال قيد الأمثلية.**

Multiple Objective Linear Programming

Khalid A. Al-Alaaf
Assistant lecturer
Department of Financial and Banking Sciences
University of Mosul

Abstract

This research tried to cover the development of tradition mathematical programming to mathematical programming with multiple objective models (MOMP). This done by transformation of linear programming to multiple objective linear programming (MOLP) with lexicographically priority and solve the decision problem by using two phase multi-

تأريخ استلام البحث ٢٠٠٨/٦/٣ تأريخ قبول النشر ٢٠٠٨/٩/٢١

criteria. They are revised simplex method (Two Phase R. M. S. M.) in large and complex system. The multi-criteria simplex method (M. S. M.) was used in small problem to reach the optimal solution which known as non-dominated solution. The case study concerned with decision making problem. Three functions have been used as lexicographical priorities such the first and third functions in maximization case; the second was in the minimization case. The model building for the problem was made to find the final solution. It is found that the non – dominated case have different profits for the functions.

المقدمة

تعدّ البرمجة الخطية المقدمة من قبل Dantzig عام 1947 من أهم وأبرز النماذج الرياضية لتمثيل المشاكل في مختلف القطاعات والمؤسسات سواء أكانت مالية أم إنتاجية، صحية، أم تعليمية، مدنية أم عسكرية.

وطريقة السمبلكس المستخدمة في حل نماذجها مازالت أكثر الطرائق شيوعاً وقبولاً على الرغم من وجود طرائق أخرى إلاّ أنها لم تستطع مجاراة خوارزمية السمبلكس إلى يومنا هذا بالكثير من الخواص والمميزات.

وفي عقد السبعينات والثمانينات جرت العديد من الإضافات والتوسعات والتطورات على نماذج البرمجة الخطية والرياضية عموماً لتجاوز العديد من محدداتها والمعوقات التي واجهت هذا النوع من النماذج سواء عند الصياغة أو الحل. وقدمت العديد من النماذج كالبرمجة الهدفية Goal Programming (GP) والبرمجة الخطية المتعدد الدوال* Multiple Objective Linear Programming (MOLP)

---

* ينوه الباحث بدءاً إلى إمكانية وجود عدة ترجمات لمصطلح Multiple Objective Linear Programming والمعروف باختصار (MOLP) وكالآتي:

- (البرمجة الخطية المتعددة الأغراض) والتي تستند إلى ترجمة Objective (بالغرض)، وهي الترجمة الأحدث والأكثر دقة لكنها مازالت نادرة الاستخدام.
- (البرمجة الخطية المتعددة دوال الهدف) والتي تستند إلى ترجمة Objective (بالهدف)، وهي الترجمة الأقل دقة لكنها شائعة الاستخدام.
- (البرمجة الخطية المتعددة الدوال)، وهي الترجمة التي أخذ بها الباحث لإظهار جوهر المصطلح العلمي والأنموذج قيد الدراسة، والذي يتميز بعدة دوال Mult-Function وليس دالة واحدة One-Function، ولكي لا يتعارض مع ترجمة أنموذج جديد للبرمجة الهدفية (GP) أطلق عليه Multi Goal Linear Programming والمعروف باختصار (MGLP) والذي ستكون ترجمته استناداً إلى ما سبق (بالبرمجة الخطية المتعددة الأهداف) بترجمة كلمة (Goal) بالهدف. وبهذا أصبح لدينا أنموذجان يختلفان من حيث الشكل والجوهر والحل المستخرج، وبهذا لابد لهما من ترجمات مختلفة.
- يمكن الرجوع إلى مصدر رقم (٤) في قائمة المصادر لدراسة الفروقات بين مصطلحي (Objective) و(Goal) واستخدامهما ومكوناتهما في نماذج البرمجة الرياضية الحديثة الذي يعرفهما كالآتي:
- Objective (الغرض): مطلب غير محدد موصوف مباشرة (تعظيم أو تصغير) يجب الوصول فيه إلى أقصى حد ممكن.
- Goal (الهدف): مطلب ثابت مؤقت يجب إنجازه قدر الإمكان في صياغة المشكلة المعطاة.

والبرمجـة اللاخطيـة (NLP) Non-Linear Programming وأدخـل متجـه المخـاطرة Risk Vector ونظريـة الفوضـى Fuzzy Theory والتـصادفية Stochastic علـى هذه النماذج لتدخل بذلك أماكن وتطبيقات كـان من المستحيل دخولها بإمكانيـات البرمجـة الرياضية التقليدية.

وفـي هـذا البحـث سـيتم دراسـة أحـد هـذه التطـورات والتوسـعات بتنـاول أنمـوذج MOLP تحديـداً وطرائـق الـسمبلكس المحدثـة مثـل .M.S.M لحـل المـشاكل الـصغيرة الحجـم و.Two Phase R.M.S.M لحـل المـشاكل الكبيـرة الحجـم والـشاملة لمختلف أنواع القيود بالتطبيق العملي على إحدى الحالات الدراسية الخاصة بمستشفى تخصصي بالجراحة يرغب بتعظيم وتدنية ثلاثة دوال ذات أسبقيات معجمية وفي ظل مجموعة من القيود المهمة.

مشكلة البحث (نظرياً)

في هذا البحث سنتناول مشكلة عامة لدى متخذ القرار تمتلك المواصفات الآتية:

١. وجود عدة دوال هدف لدى متخذ القرار.
٢. الدوال تمتلك أسبقيات معجمية.
٣. وجود مجموعة من القيود.

وبهـذا سـيكون لـدينا مـشكلة اتخـاذ قـرار متعـددة الـدوال Multiple Objective Decision Making Problem المعروفـة باختـصار "MODM" والتـي يمكـن التعبيـر عنها بالأنموذج الرياضي العام الآتي:

$$\max\,[f_1(x)\,,f_2(x),\ldots\ldots.f_K(x)]$$

$$\text{s.t.} \quad : \quad g_i(\underline{X}) \le 0 \qquad\qquad ,\, i = 1,2,\ldots\ldots.., \quad m$$

إلاّ أننا سنتناول حالـة خاصـة للأنمـوذج* المـذكور آنفـاً، وهـي أن تكـون الـدوال والقيود خطية وبهذا سيتم التعبير عن المشكلة لـدى متخذ القرار بـالأنموذج الخـاص الآتـي:

---

* ينوه الباحث إلى ما يأتي:

- يمكن أن تكون جميع النماذج في البحث بشكل Max or Min أو معيار آخر مثل Minmax أو Maxmin حسب الأنموذج قيد الدراسة.
- وبالنسبة للقيود يمكن أن تكتب أيضاً بأشكال أخرى مثل التعبير عن الطرف الأيمن بثابت غير صفري مثل $\underline{b}$.
- النماذج المذكورة آنفاً تحتوي على m قيد وk دالة.

$$\max[\underline{C}_1^T \underline{X}, \underline{C}_2^T \underline{X}, \ldots\ldots\ldots, \underline{C}_K^T \underline{X}]$$
$$s.t. \quad A\underline{X} \le \underline{b}$$
$$\underline{X} \ge \underline{O}$$

من هنا سيكون لدينا مشكلة برمجة خطية متعددة الدوال Multiple Objective Linear Programming problem ذات أسبقيات معجمية Lexicographically Priority قيد الدراسة والحل والتطبيق.

أما مشكلة البحث (عملياً) فتتمثل بوجود مستشفى أهلي تخصصي بالجراحة العامة يرغب متخذي القرار فيه بتعظيم أرباحهم من العمليات الكبرى كأسبقية أولى، ويرغبون بتدنيه مجموع العمليات الصغرى لديهم كأسبقية لاحقة، وكذلك لديهم الرغبة بتعظيم أرباحهم من العمليات الوسطى كأسبقية أخيرة، في ظل عدة قيود مفروضة عليهم، أهمها الكادر الطبي التخصصي وغرف العمليات وحجم الطلب.

هدف البحث

إن هذا البحث يهتم بإنجاز مجموعة من الأهداف التي يمكن حصرها بما يأتي:

١. تقديم أنموذج (MOLP) يمتلك كفاءة عالية في تمثيل مشكلة القرار Decision Problem الموصوفة نظرياً في مشكلة البحث.
٢. التعريف بمصطلح الأسبقيات المعجمية Lex. Priorty المعتمد تحديداً في بعض نماذج البرمجة الرياضية المتعدد الدوال MOMP.
٣. تقديم أهم وأبرز طرائق حل أنموذج MOLP تحديدا بالشكل الآتي:
- طريقة السمبكلس المتعددة المعايير Multicriterion Simplex Method والمختصرة (M.S.M.).
- طريقة السمبكلس المتعددة المعايير المعدلة ذات الوجهين Two Phase Multicriterion Revised Simplex Method الجبرية والمختصرة (Two Phase R.M.S.M.).

٤. إيجاد الحل النهائي لاختيار المزيج الإنتاجي الأمثل من العمليات الجراحية الموصوفة بثلاث دوال هدفية معجمية.

أهمية البحث

تتأتى أهمية البحث من أهمية تطبيقات البرمجة الخطية، وكذلك من أهمية التطور الحاصل بها من حيث تعددية الدوال الممكن الأخذ بها، مما يتيح لهذا الأنموذج MOLP استخدامات وتطبيقات أوسع في شتى المجالات والقطاعات، من

هنا أصبح الأنموذج يمتلك واقعية أكبر في تمثيل المشاكل التي تبحث عن أمثلية متعددة المعايير*.

منهجية البحث

إن منهجية هذا البحث تعتمد الخطوات ذاتها المتبعة بمنهجية العمل بأساليب بحوث العمليات عامة (تحديد المشكلة، الصياغة، بناء الأنموذج، إيجاد الحل النهائي، التطبيق والمتابعة للأنموذج) مع التركيز على طرائق الحل المقترحة بحل الأنموذج الخاص قيد الدراسة والمتمثلة بطريقتي (M.S.M., Two phase. R.M.S.M.)

الجانب النظري: أنموذج البرمجة الخطية Linear Programming Model

١. أهمية البرمجة الخطية

يعد أنموذج البرمجة الخطية Linear Programming Model (LP) أحد أهم وأبرز نماذج البرمجة الرياضية التقليدية Trad . Math. Prog. المعروفة باختصار (MP) والمقدم من قبل العالم Dantzig عام 1947، إذ تم في حينها اقتراح طريقة السمبلكس Simplex Method (S.M.) أسلوباً لإيجاد الحل الأمثل Optimal Sol. والتي جرى تطويرها عام 1954 باشتقاق طريقة السمبلكس المعدلة Revised Simplex Method (R.S.M.) التي تتميز بكفاءة كبيرة عند الأخذ بها حاسوبياً من خلال اختزالها لحجم البيانات الذي يخزن ويبدل عند كل تكرار Iteration باعتمادها التمثيل الجبري، لكن لابد من التأكيد على أنه لا يوجد أي اختلاف آخر من حيث خوارزمية الحل المتبعة في كلا الطريقتين**.

وجرت العادة على تمثيل أنموذج البرمجة الخطية (بالمصفوفات) بالشكل الآتي:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f = \underline{c}^{T}\,\underline{X} \\
s.t. \quad & A\,\underline{X} \le \underline{b} \\
& \underline{X} \ge \underline{O}
\end{aligned}
$$

---

* إن كلمات مثل معيار Criteria أو متجه Vector أو غرض Objective أو هدف Goal أو صفة Atribute جميعها تختلف إحداهما عن الأخرى، لكنها تشترك عموماً عند تداولها بوجود تعددية Mult في أمرٍ ما.

** لمزيد من التفاصيل أنظر عربية عبد الرحمن داود "مقارنة نظرية وعملية بين طريقتي السمبلكس الاعتيادية والسمبلكس المعدلة مع تطبيق في مجال الصحة" جامعة الموصل 1988.

إن الأنموذج المذكور آنفاً يمتلك مجموعة من المواصفات، ويتطلب مجموعة من المستلزمات الواجب توفرها، ويعتمد على مجموعة من النظريات المتعلقة بإيجاد نقاط الحل الخاصة بمنطقة الحل الأمثل.

أما طرائق حل هذا الأنموذج فذكرنا أنفاً أهم وأبرز الطرائق R.S.M. و S.M. وفي ما يأتي تذكرة موجزة وبسيطة لخوارزمية الحل بطريقة السمبلكس عموماً والتي يمكن تحديدها بالخطوات الآتية:

خ١ : عمل جدول يمتلك حلاً أساسياً ابتدائياً.

خ٢ : تحديد المتغير الداخل والخارج والعنصر المحوري.

خ٣ : عمل جدول سمبلكس لاحق بالاستفادة من العنصر المحوري.

خ٤ : اختبار أمثلية الحل الممكن باعتماد القاعدة:

- إذا كانت الدالة Maximize وكان $all\ Z_j - i_j \geq 0$ فذلك يعني توصلنا إلى الحل الأمثل النهائي.
- إذا كانت الدالة Minimize وكان $all\ Z_j - i_j \leq 0$ فذلك يعني توصلنا إلى الحل الأمثل النهائي.

فإذا تم الحصول على إجابة نعم في خ٤ نتوقف. وإلاّ نعاود الحل اعتباراً من خ٢.

ومن المعلوم أنه في حالة عدم استطاعتنا تحديد المتغير الداخل فذلك يعني الحل غير ممكن No Feasible Solution ، وهي حالة خاصة في البرمجة الخطية.

وقد لاقت البرمجة الخطية استخداماً واسعاً في مختلف القطاعات الصناعية والزراعية والتعليمية والصحية والمؤسسات الربحية والإنتاجية وقُدِمَ العديد من النماذج التطبيقية في مجال التخطيط والإنتاج والسيطرة النوعية والجدولة والتخصيص والنقل واستطاعت البرمجة الخطية تقديم الكثير من الحلول العلمية والعملية التي لاقت ترحيباً من قبل الإدارات القائمة على هذه المؤسسات ومتخذي القرار فيها.

٢. المعوقات والمشاكل في البرمجة الخطية

إن ما يعاب على أنموذج البرمجة الخطية حالياً وجود مجموعة من المحددات والمشاكل والمعوقات سواءً في مراحل الصياغة أو النمذجة أو الحل، كاحتوائها على دالة هدف واحدة Only One Objective Function موصوفة عامة بشكل تعظيم Maximize أو تصغير Minimize تهتم غالباً بتعظيم الربحية أو تدنية التكاليف، واعتمادها شرط الخطية Linearity الواجب توافره في دالة الهدف والقيود واستمرارية Continuous متغيرات القرار قيد الحل فيها.

أما المشاكل التي تعانيها عند إيجاد الحل فيكمن إبراز أهمها وهو عدم وجود حل ممكن No Feasible Solution، وكذلك من المآخذ عليها تقديمها لحل أمثل وحيد Unique Optimal Solution ذي مفهوم اقتصادي غالباً (تعظيم أرباح Maximize Profit) ليس على متخذ القرار إلاّ القبول به أو رفضهِ. والذي كان هو المعيار الوحيد للحكم على كفاءة المؤسسة أو القطاع أو النظام قيد التحليل والدراسة.

أما الآن فتعد الربحية الاقتصادية ليست هي المعيار الوحيد للحكم على أمثلية النظام Optimality of System، بل تطور الأمر بالاعتماد على تعددية المعايير Multiple Criteria للحكم على أداء النظام ومدى أمثليته وظهور ما يسمى باتخاذ القرارات تحت عدة معايير Multi – Criteria Deciston Making والمعروفة حالياً باختصار MCDM.

وأخيراً وليس آخراً عدم قدرة أنموذجها العام على التمثيل الكفوء والواقعي للأنظمة الكبيرة والمعقدة مقارنة بالنماذج الحديثة المقدمة من قبل البرمجة الرياضية المتعددة الدوال MOMP في العقود الثلاثة الأخيرة.

أما سكونية (ثبوتية) أنموذجها العام فما زال عائقاً اتجاه دخولها في تطبيقات المخاطرة Risk وعدم التأكد .Uncertain والعشوائية Stochastic. وستبقى البرمجة الخطية وعلى الرغم من كل ما قيل هي الأساس وإن كل ما يجري هو تطور وتوسع في أنموذجها العام المعروف لدى الجميع.

٣. التطورات في البرمجة الخطية

بناء على ما ذكر تم تقديم العديد من المقترحات والنماذج التي طورت الأنموذج العام للبرمجة الخطية التقليدية وطرائق الحل فيه فظهرت النماذج اللاخطية Non- Linear Programming لتجاوز شرط الخطية، وظهرت نماذج البرمجة العددية الصحيحة Integer Programming لتوسيع نوع المتغيرات قيد الدراسة من مستمرة الى متقطعة وجاءت نماذج البرمجة الهدفية Goal Programming لتجاوز مشكلة عدم وجود حل ممكن وإعطاء مرونة أكبر وكفاءة أعلى لتمثيل وصياغة المشاكل الكبيرة والمعقدة وجاءت نماذج البرمجة الرياضية المتعددة الدوال MOMP المتنوعة لتجاوز مشكلة أحادية دالة الهدف في البرمجة الخطية و ظهرت النماذج العشوائية Stochastic Models لتجاوز مشكلة السكونية.

ذكرنا سابقاً بشكل موجز بعض أهم المحددات والمعوقات والمشاكل الخاصة بالبرمجة الخطية وطرق الحل فيها ومن ثم ذكرنا أهم التطورات التي جرت لتجاوز هذه العقبات وفي هذا البحث ستقتصر دراستنا النظرية والعملية على جانب واحد من هذه التطورات الأ وهي تعددية الدوال Multi – Objective لتجاوز مشكلة أحادية دالة الهدف في أنموذج البرمجة الخطية التقليدي من خلال تقديم أنموذج البرمجة الخطية المتعدد الدوال MOLP وطرائق الحل فيه لاحقاً مع الإشارة إلى وجود نماذج أخرى خارج نطاق بحثنا هذا.

أما عن التطورات الحاصلة في طرائق حل نماذج البرمجة الخطية فلابد من الإشارة إلى الانتقال من السمبلكس الاعتيادية .S.M إلى المعدلة .R.S.M، ومن ثم ظهور السمبلكس ذات الوجهين .Tow Phase S.M، ومن ثم حالياً ظهور ما يسمى بالسمبلكس المتعددة المعاير .M.S.M. وتطورها أيضاً إلى .R.M.S.M وإلى Two Phase R.M.S.M. وأخيراً لابد من الإشارة إلى أن طريقة السمبلكس هي ليست الأسلوب الأوحد في حل مشاكل البرمجة الخطية المعقدة والكبيرة الحجم والمتعددة

الدوال، بل هناك العديد من المقترحات والخوارزميات مثل Ellipsoid Algorithm For Linear Programming المعروفة باختصار (EA).

ثانياً- أنموذج البرمجة الخطية المتعددة الدوال Multiple Objective Linear Program Model

١- البرمجة الخطية المتعددة الدوال وأنموذجها العام

إن البرمجة الخطية المتعددة الدوال بوصفها أسلوباً Approach لا تختلف كثيراً من حيث الأدوات والغايات مقارنة بأسلوب البرمجة الخطية التقليدي المعروف لدى الجميع، إلاّ أنه أكثر توسعاً من خلال قدرة أنموذجها على احتواء عدة دوال هدف ذات أسبقيات محددة، وبهذا يمكن تعريف البرمجة الخطية متعددة الدوال بأنها "أسلوب للوصول بمتجه Vector من الدوال الخطية المعجمية إلى أقصى قيمة ممكنة Maximum Possible Value أو (أدنى قيمة ممكنة) بوجود مجموعة من القيود" أو "أنها أسلوب يهتم بتحقيق أمثلية Optimality متعددة المعايير Multi-criteria في ظل مجموعة من القيود" وبهذا التعريف يبدو واضحاً التمييز الجوهري MOLP مقارنة بـ LP بأنها "تحاول الوصول بالنظام قيد الدراسة إلى حالة الامثلية المتعددة المعايير أو الصفات وليست الامثلية الاقتصادية (الربحية) Optimality Econometric المتعارف عليها في نماذج البرمجة الخطية التقليدية (Zeleny, 1982, 218-279) .

إن أول من قدم MOLP هو العالم Zeleny عام 1974 بكتابه Linear Multiple Objective Programming، ومن ثم قدم عام 1975 أول برنامج بلغة الفورتران يولد حلولاً غير سائدة Non Dominated Solution اعتماداً على طريقة السمبلكس المتعددة المعايير .M.S.M، وفي عام 1976 قدم Yu and Zeleny التحليلات العِلمية الخاصة بأنموذج MOLP. وفي عام 1977 قدم Isermann مجموعة من الحلول الكفوءة في MOLP، وفي عام 1978 قدم Cohon تغطية شاملة لها وفي عام 1979 قدم Hwang *et. al.* برنامجاً لحل مشاكل البرمجة الخطية المتعددة الدوال في المشاكل الكبيرة الحجم.

إن أنموذج البرمجة الخطية المتعددة الدوال يمكن تمثيله بعدة أساليب وبالشكل الآتي:

التمثيل الجبري بالمصفوفات وكالاتي:

$$\max[\underline{C}_1^T \underline{X}, \underline{C}_2^T \underline{X}, \ldots\ldots\ldots, \underline{C}_L^T \underline{X}]$$

$$s.t. \quad A\underline{X} \le \underline{b}$$

$$\underline{X} \ge \underline{O}$$

والتمثيل بالعناصر يكون بالشكل الآتي:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f_1(x) = C_{11}X_1 + C_{12}X_2 + \dots\dots + C_{1n}X_n \\
\max \quad & f_2(x) = C_{21}X_1 + C_{22}X_2 + \dots\dots + C_{2n}X_n \\
& \vdots \\
\max \quad & f_l(x) = C_{l1}X_1 + C_{l2}X_2 + \dots\dots + C_{ln}X_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S.t.& \\
g_1(x) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n \left| \begin{matrix} \le \\ \ge \\ = \end{matrix} \right| \begin{matrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{matrix} \\
&\vdots \\
g_m(x) &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2, \dots\dots\dots\dots, x_n \ge 0$$

أو التمثيل الإحصائي وهو على النحو الأتي:

$$\max \quad f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j, \qquad i = 1,2,\dots\dots,L$$

$$S.t.$$

$$g_r(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}x_j \left| \begin{matrix} \le \\ \ge \\ = \end{matrix} \right| b_r \qquad r = 1,2,\dots\dots m$$

$$x_j \ge 0 \qquad\qquad for \quad all \quad j$$

إذ يحتوي الأنموذج على n متغير قرار و L دالة هدف و m من القيود.

ويقترح الباحث التمثيل الآتـي للتعبير عن أنمـوذج البرمجـة الخطيـة المتعددة الدوال:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f = C\,\underline{X} \\
\min \quad & f = D\,\underline{X} \\
S.t. \quad & A\,\underline{X} \le \underline{b}
\end{aligned}
$$

إذ :

$\underline{X}$: متجه المعاملات العمودي للأنموذج ذات الحجم $(n \times 1)$.

C: مصفوفة المعاملات للدوال ذات حجم $(L_1 \times n)$ في حالة max.

D: مصفوفة المعاملات للدوال ذات حجم $(L_2 \times n)$ في حالة min.

A: مصفوفة المعاملات الفنية للقيود ذات الحجم $(m \times n)$.

بحيث إن $L_1 + L_2 = L$ وهو عدد الدوال الكلية في الأنموذج.

لتبيان أن الدوال في أنموذج MOLP يمكن أن تكون في حالة Max أو في حالة Min، وأن متغيرات القرار يمكن أن تكون مستمرة أو أعداداً صحيحة أو ثنائية أو محدودة. أما شرط إن الدوال ذات أسبقيات معجمية (تفضيلات معجمية) Lexicographically Priority فيمكن تعريفها كالآتي*:

"لأي زوج من الصفوف المرتبة Two Order Arrays
[a(1)، a(2)، a(n) .....] = a، [b(1)، b(2)، b(n) .....] = b . نقول a أفضل معجمياً (ذات أسبقية معجمية) من b إذا كان هناك ثابت k حيث: (K=1, 2, …, n).

$a(k) < b(k)$ & $a(1) = b(1)$ ، $a(2) = b(2)$ ، … ، $a(k-1) = b(k-1)$
for any minimization objective . or
$a(k) > b(k)$ & $a(1) = b(1)$ ، $a(2) = b(2)$ ، … ، $a(k-1) = b(k-1)$
for any maximization objective . "

وهذا يقودنا إلى تعريف الأمثل المعجمي Lexicographically Optimal بأنه "أي حل لمشكلة البرمجة الخطية المتعددة الدوال MOLP يكون أفضل معجمياً إذا كان لا يوجد حل آخر أفضل معجمياً Lexi. Better، أفضل منه في الدوال (أو الأهداف) (Objective (or goal (المرتبة) الأسبقيات Prioritized (order).

أما تعريف الحل الأمثل Optimal Solution الملائم لأنموذج البرمجة الخطية المتعددة الدوال فيمكن وصفه "حلاً ممكناً" بأمثلية معجمية للأهداف"، أي "حلاً ممكناً إما أن يكون ذا تعظيم معجمي أو تصغير معجمي لدوال الأهداف".

٢. طرائق الحل لنماذج البرمجة الخطية المتعددة الدوال

إن طرائق الحل في نماذج البرمجة الخطية المتعددة الدوال عديدة ويمكن اعتبار طريقة السمبلكس المتعددة المعايير Multcriteria Simplex Method (M.S.M.) أهم وأبرز الطرائق المتبعة للحل يدوياً في المشاكل الصغيرة الحجم وطريقة السمبلكس الجبرية ذات الوجهين. Two –phase Multtcritarion Revised Simplex Method (Two –phase R.M.S.M.) أكثر الطرائق شيوعاً في برامجيات الحاسوب لحل المشاكل الكبيرة الحجم لما تمتلكه من مميزات.

وكلا الطريقتين تتبع الأسلوب نفسه الخاص بالسمبلكس القياسية Standard Simplex المعروفة في البرمجة الخطية التقليدية، وتختلف عنها بما يأتي:

١. توسيع صف المعيارية Row's Criteria إلى عدة صفوف Mult- Row Criteria لتناظر تعددية دوال الهدف في أنموذج MOLP.
٢. يتم إيجاد الحل الأمثل أولاً للأسبقيات العليا (الخاص بالدالة الأولى f_1)، ومن ثم يتم الانتقال إلى الأسبقيات الدنيا (الخاص بالدالة الثانية f_2) وهكذا.

* إن متجه التفضيل المعجمي يكون بحجم متغيرات القرار (n) يعبر عن أن العلاقة ما بين المتجهين a،b هي علاقة منطقية غير مقاسه تكون إما في حالة أصغر > أو في حالة أكبر <، ولا يمكن أن يكون هناك أي ثابت وليكن k يمكن أن يغير أو يقلب هذه العلاقة.

٣. لا يجوز عند إيجاد الحل الأمثل للأسبقية الدنيا التأثير سلبياً على ما تم تعظيمه أو تصغيرهُ في الأسبقية العليا.

أما من حيث تقنية الحل فهي كما هي تبتدئ بالحل الأساسي الابتدائي ومن ثم تحسين الحل بإيجاد حل ممكن أفضل، وهكذا حتى نتوصل إلى الحل النهائي الأمثل الذي لا يمكن إيجاد أفضل منه إطلاقاً.

وفيما يأتي خطوات خوارزمية .M.S.M واستخدامها في حل نماذج البرمجة الخطية المتعددة الدوال MOLP بإيجاز

خ[1] : إنشاء جدول سمبلكس ابتدائي.

خ[2]: حساب صف المعيارية $Zj - Cj$ لكل الدوال $k= 1, 2, \ldots, L$.

خ[3]: نبدأ $k = 1$ (أسفل الجدول).

خ[4]: اختيار المتغير الداخل.

- إذا لم يكن هناك اختيار. يعني الحل أمثل لـ$k=1$. نذهب إلى خ[7] (حالة نادرة جداً).
- إذا لم يتم الاختيار، عدم وجود حل ممكن (حالة خاصة)، توقف.
- إذا تم الاختيار، استمر.

خ[5]: اختيار المتغير الخارج.

- إذا لم يتم الاختيار، المشكلة غير محددة، توقف .
- إذا تم الاختيار، استمر .

خ[6]: اشتق حل لاحق (استناداً إلى العملية المحورية)

خ[7]: نختبر الأمثلية :

- الحل أمثل لجميع الدوال $k= 1, 2, \ldots, L.$ ، نتوقف .
- الحل أمثل عند $k =1$ فقط ، استمر إلى خ[8] .
- الحل غير أمثل لـ $k = 1$ ، اذهب إلى خ[4] .
- لا يوجد حل ممكن ، نتوقف .

خ[8]: ضع $k = k + 1$.

- إذا $k < L$ ، أذهب إلى خ[4].
- إذا $k = L$ ، توقف .

والجدول الآتي يمثل الحل الأمثل النهائي في طريقة .M.S.M :

الجدول ١
الحل الأمثل جبرياً لطريقة السمبلكس المتعددة المعايير

قيم المتغيرات الأساسية	متغيرات غير أساسية $X_{m+1} \dots x_j \dots x_n$	متغيرات أساسية $X_1 \dots x_m$	المتغيرات الأساسية الحالية
X^o_1 . . . X^o_m	$Y_{1(m+1)}$ Y_{1n} . . . Y_{ri} . . . . . $Y_{m(m+1)}$ Y_{mn}	$1 \dots\dots 0$ . . . . . . $0 \dots \dots 1$	X_1 . . . X_m
$f_{1(x^o)}$ . . . $F_{L(x^o)}$	$Z_{1(m+1)}$ Z_{1n} . . . . $Z_{l(m+1)}$ Z_{Ln}	$0 \dots\dots 0$ . . . . . . $0 \dots\dots 0$	صفوف المعيارية

المصدر: (Zeleny, 1982, 235)

إذ : $r = 1, 2, \dots, m$ ، $J = 1, 2, \dots, n$

وفيما يأتي تفصيل فلسفي تحليلي لطريقة .M.S.M

نفترض أنه X^o حل غير منحل. وهذا يعني أن جميع المتغيرات الأساسية موجبة (الحل المنحل عندما يكون عدد المتغيرات الأساسية التي تظهر في الحل الأمثل أقل من عدد القيود، أو إن أحد المتغيرات الأساسية يساوي صفراً على الأقل في الحل النهائي الأمثل)، وبهذا تكون جميع المتغيرات الأساسية في متجه الحل الأولي ذات قيمة صفرية، في حين المتغيرات المضافة ذات قيمٍ غير صفرية

أي: $X^o = (X_1, X_2, \dots\dots\dots, X_m, 0,0\dots\dots,0)$.

$S.t.$

$$Xj = Xj^o > 0 \quad for \quad j = 1,2,\dots.,m$$

$$Xj = 0 \quad for \quad j = m+1,\dots.,n$$

أما العدد Yrj يعرف عند $r = 1, 2, \dots, m$ ، و $j = 1, 2, \dots, n$ فلزيادة Xj وحده واحدة يجب علينا التضحية بوحدات من القيم الحالية لـ Yrj من القيم الحالية لـ Xr.

ومن الواضح أن لجميع المتغيرات الأساسية $j = 1, 2, \dots, m$ نجد:

$$Yrj = 1 \quad \text{if} \quad r = j$$

$$Yrj = 0 \quad \text{if} \quad r \neq j$$

لنفرض أننا نريد زيادة المتغير Xj بوحدة واحدة فما هي التضحية في الحدود للدالة ذات التسلسل i ؟ إن زيادة Xj يعني أن المتغيرات $X1,\dots\dots.,Xm$ سوف تقلل

بـ Yij ، ...... ، Ymj على التوالي. وستكون $X1,.......,Xm$ هي المتغيرات الأساسية الحالية ومعامل دالة الهدف i هي $Ci1$ ، ....، Cim .

ولحساب القيمة الكلية المضحى بها ببساطة نضرب كل Yrj بما يقابلها من Cir والناتج يكتب :

$$\sum_{r=1}^{m} C_{ir} \quad Y_{rj}$$

إلاّ أن كان حقيقة Xj زاد وحدة واحدة ؟ ماذا سنُحَصِلْ بهذه الزيادة في حدود دالة الهدف i ؟ وبهذا من الواضح أن Cij هي العقدة المؤثرة في الدالة i بزيادة المتغير Xj وحدة واحدة وهي تحسب بالشكل الآتي:

$$Z_{ij} = \sum_{r=1}^{m} CirYrj - C_{ij}$$

وبهذا سيكون من الواضح جداً للمتغيرات الأساسية j= 1, 2, …, m جميع Zij = 0 وكل هذا لسبب:

$$Y_{rj} = 1 \quad if \quad r = j$$

$$Y_{rj} = 0 \quad if \quad r \neq j$$

وهذا سيؤدي إلى:

$$\sum_{r=1}^{m} C_{ir} Y_{rj} = C_{ij} \quad and \quad C_{ij} - C_{ij} = 0$$

وبالتعاقب فإن المتغيرات الأساسية المشتقة في الحل الأساسي الحالي لا تستطيع تحسين قيمة دالة الهدف i لكن المتغيرات غير الأساسية تستطيع فعل ذلك مؤكداً.

إن القيمة الحالية لكل دوال الهدف L ممكن إيجادها مباشرة من الجدول ١ حيث:

$$f_i(X^o) = \sum_{r=1}^{m} C_{ir} X_r^o \ , \ i = 1,........,L$$

يشير لقيم دالة الهدف i عند الحل X^o . (Zeleny, 1982, 235)

وهنا لابد من القول لدخول متغيرات غير أساسية إلى المتغيرات الأساسية الحالية لابد من وجود على الأقل قيمة $Zij < 0$، وبهذا سيكون القيمة الكلية المضحى بها أقل من القيمة المستحصلة.

إن Zij تشير إلى كمية الزيادة في $fi(X^o)$ لكل وحدة بالزيادة في المتغير غير الأساسي xj . وإذا $Zij \geq 0$ لأي متغير غير أساسي، عندها قيمة $fi(X^o)$ حقيقةً سوف تزداد أو تبقى من دون تغير لكل وحدة زيادة في Xj .

وإذا $Zij \geq 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية $j = m + 1$ ،...... ،عندها دالة الهدف المقابلة لـ $fi(X^o)$ وصلت إلى تعظيمها (حل أمثل)، ويعني ذلك لا يمكن تحسنها أكثر من هذا .

أما إذا $Zij \geq 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية، لكن على الأقل يوجد $Zij = 0$ فهذا يعني أنه على الأقل يوجد حل أمثل بديل يعظم الحل.

بقيت نقطة واحدة لابد من توضيحها من قبل الباحث تخص كيفية الحصول على الحل الابتدائي لجدول السمبلكس الابتدائي، إذ سنجد:

أولاً- إذا كانت جميع القيود من النوع ≤

عندها الحل سهل جداً نبدأ مع m متغير خامل Sluck variable بجعلها متغيرات أساسية. وبالمقابل سيكون حينها كل متغيرات القرار غير أساسية أي تساوي صفراً.

وبهذا يمكن القول إن .M.S.M تقدم الحل الأمثل لأنموذج MOLP المصاغ بالشكل الآتي تحديداً :

$$Max \quad \underline{f} = C\,\underline{X}$$

$$Min \quad \underline{f} = D\,\underline{X}$$

$$s.to \quad A\,\underline{X} \leq \underline{b}$$

$$\underline{X} \geq \underline{o}$$

والمثال المبسط الآتي يوضح كل ما ذكر سابقاً تفصيلاً:

$$Max \quad f_1 = 5X_1 + 8X_2$$

$$Max \quad f_2 = 4X_1 + 15X_2$$

$$S.t.$$

$$10X_1 + 5X_2 \leq 200$$

$$4X_1 + 8X_2 \leq 200$$

$$X_1 \;,\; X_2 \geq 0$$

وبهذا سيكون الحل التفصيلي لاستخدام M.S.M. فمثلاً بالجدول ٢.

الجدول ٢

الحل التفصيلي باستخدام طريقة السمبلكس المتعددة المعايير

Basic Variable	5 4 X_1	8 15 X_2	0 0 S_1	0 0 S_2	R.H.S.
S_1	10	5	1	0	200
S_2	4	8	0	1	200
$f_2 \to Z_j - C_j$	-4	-15	0	0	0
$f_1 \to Z_j - C_j$	-5	-8	0	0	0
S_1	$\frac{60}{8}$	0	1	$-\frac{5}{8}$	75
X_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	25
$f_2 \to Z_j - C_j$	$\frac{28}{8}$	0	0	$+\frac{15}{8}$	375
$f_1 \to Z_j - C_j$	-1	0	0	1	200
X_1	1	0	$\frac{8}{60}$	$-\frac{5}{60}$	10
X_2	0	1	$-\frac{1}{15}$	$\frac{38}{240}$	20
$f_2 \to Z_j - C_j$	0	0	$-\frac{28}{60}$	$+\frac{205}{96}$	340
$f_1 \to Z_j - C_j$	0	0	$+\frac{8}{60}$	$+\frac{13}{12}$	210

المصدر: من إعداد الباحث.

وبهذا يكون الحل الأمثل المعجمي $X_1 = 10, X_2 = 20$ مع:

$$\max \ f_1 = 210$$

$$\max \ f_2 = 340$$

هو الحل النهائي لأننا لن نستطيع الحصول على حل آخر أفضل، إلاّ بالإخلال بما تم تحقيقه للأسبقية العليا، وهذا واضح في صفوف المعيارية في الجدول السابق.

ثانياً- إذا كانت القيود من النوع ≤ ، ≥ ، =

عندها لابد من اللجوء إلى Two phase R. M.S.M. بإدخال المتغيرات الوهمية في جدول السمبلكس الابتدائي التي يجب التخلص منها في عمليات الوجه الأول one phase –، ومن ثم تكملة الحل بالوجه الثاني two – phase بالخطوات ذاتها التي ذكرت بطريقة (M.S.M.)، وبهذا التوضيح لابد من القول إن Two M.S.M. phase R. تقدم حلولاً أشمل من M.S.M. بتعميمها الأنموذج MOLP تحت المعالجة بما يأتي :

$$\begin{aligned}
&Max \quad \underline{f} = C\,\underline{X} \\
&Min \quad \underline{f} = D\,\underline{X} \\
&s.t. \qquad A\,\underline{X} \left| \begin{matrix} \le \\ \ge \\ = \end{matrix} \right| \underline{b}
\end{aligned}$$

وينوه الباحث للسبب المذكور آنفاً تعتبر أن Two phase R.M.S.M. والجبرية منها خاصة من أكثر الخوارزميات شيوعاً في برامجيات الحلول لنماذج MOLP لمميزاتها البرمجية الخاصة بخزن البيانات وأمور أخرى خارج نطاق بحثنا هذا*.

وسيتم دراسة وتوضيح طريقة ..Two – phase R.M.S.M بالجانب العملي الممثل بالفقرة الآتية:

الجانب العملي

ذكرنا في متن مشكلة البحث الحالة الدراسية التي سبق الأخذ بها تطبيقاً والمتمثلة "بوجود مستشفى أهلي تخصصي بالجراحة العامة يرغب متخذو القرار فيه بتعظيم أرباحهم من العمليات الكبرى كأسبقية أولى، ويرغبون بتدنية مجموع العمليات الصغرى كأسبقية لاحقة، وكذلك لديهم الرغبة بتعظيم أرباحهم من العمليات الوسطى كأسبقية أخيرة في ظل عدة قيود مفروضة عليهم، أهمها الكادر الطبي التخصصي وغرف العمليات وحجم الطلب".

وفيما يأتي وباستخدام منهجية بحوث العمليات نعرض الخطوات التفصيلية للوصول إلى الحل النهائي للمشكلة:

خ1: الصياغة: إذ تم تحديد ما يأتي في هذه المرحلة:

١. **متغيرات القرار******:** المراد إيجادها وتم تحديدها بمتغيرات القرارات الآتية:

$X1$، $X2$ ،$X3$ عدد العمليات الكبرى التي تجريها المستشفى بأنواعها الثلاث.

$X4$،$X5$ عدد العمليات الصغرى التي تجريها المستشفى بنوعيها.

* لمزيد من التفاصيل عن أهمية R.S.M. مقارنة S.M. أنظر: داود ، عربية عبدالرحمن، ١٩٨٨.

** العمليات الكبرى (إزالة ورم، إزالة مرارة، استئصال كلية) والعمليات الوسطى (زائدة دودية، رفع لوزتين، زوائد أنفية) والعمليات الصغرى (فتح خراج، رفع غدة) على التوالي.

$X6$، $X7$،$X8$ عدد العمليات الوسطى التي تجريها المستشفى بأنواعها الثلاث.

٢. دوال الأهداف (الأهداف)

وتم تحديدها بشكل أسبقيات تفضيلية وكالآتي:

الأسبقية الأولى: تعظيم أرباح المستشفى من العمليات الكبرى.

الأسبقية الثانية: تدنية أعداد العمليات الصغرى.

الأسبقية الثالثة: تعظيم أرباح المستشفى من العمليات الوسطى.

٣. القيود

وتم تحديد أبرز وأهم القيود المفروضة على العمل في المستشفى داخلياً وخارجياً كما يأتي:

القيد الأول: محدودية الكادر الطبي التخصصي الخاص بالعمليات الكبرى (ساعة).

القيد الثاني: محدودية الكادر الطبي التخصصي الخاص بالعمليات الصغرى (ساعة).

القيد الثالث: محدودية الكادر الطبي التخصصي الخاص بالعمليات الوسطى (ساعة).

القيد الرابع: محدودية صالات العمليات الخاصة بجميع أنواع العمليات (ساعة).

القيد الخامس: توقعات الطلب على العمليات الكبرى.

القيد السادس: توقعات الطلب على العمليات الصغرى.

القيد السابع: توقعات الطلب على العمليات الوسطى.

القيد الثامن: توقعات الطلب على العمليات الوسطى من النوع الثالث فقط.

مع ملاحظة*: من المفضل مؤكداً أن تكون نتائج الحل للمتغيرات قيد الدراسة في حالة إعداد صحيحة، لأنها ستكون بذلك أكثر واقعيةً ووضوحاً بدلاً من عمليات التقريب، وبهذا تكون القيود المنطقية المضافة إلى الأنموذج هي ما يأتي:

all xi are Integer

$$all \quad x_i \geq 0$$

خ2 : بناء الأنموذج الرياضي

يرى الباحث أن التمثيل الرياضي الأمثل لمشكلة البحث المبين مفردات الصياغة فيه في خ[1] هو أنموذج برمجة خطية متعدد الدوال MOLP ذات أسبقيات معجمية Lox. Priority والذي يمكن اختزاله بالأنموذج الآتي :

* تم استخدام طريقة التفريع والتحديد Branch and bound في إيجاد حلول الأعداد الصحيحة من قبل البرنامج المستخدم QSB. ولمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع إلى برمجة الأعداد الصحيحة بأنواعها وطرائق حلها، وهي خارج نطاق بحثنا هذا بالرغم من الأخذ بها كقيد منطقي إضافي.

$$\max f_1 = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$
$$\min f_2 = C_4X_4 + C_5X_5$$
$$\max f_3 = C_6X_6 + C_7X_7 + C_8X_8$$
$$S.T.$$
$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \le b_1 \quad ....(1)$$
$$a_{24}X_4 + a_{25}X_5 \le b_2 \quad ....(2)$$
$$a_{36}X_6 + a_{37}X_7 + a_{38}X_8 \le b_3 \quad ....(3)$$
$$a_{41}X_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 + a_{44}X_4$$
$$+ a_{45}X_5 + a_{46}X_6 + a_{47}X_7 + a_{48}X_8 \le b_4 \quad ....(4)$$
$$X_2 + X_3 = b_5 \quad ....(5)$$
$$X_4 + X_5 = b_6 \quad ....(6)$$
$$X_6 + X_7 \ge b_7 \quad ....(7)$$
$$X_8 \ge b_8 \quad ....(8)$$
$$all \quad x_i \ge 0 \quad and \quad I$$

وفيما يأتي التفاصيل الكلية للأنموذج:

$maxf_1$: دالة تعظيم الأرباح لأنواع العمليات الكبرى.

$minf_2$: دالة تدنية الإنتاجية لأنواع العمليات الصغرى.

$maxf_3$: دالة تعظيم الأرباح لأنواع العمليات الوسطى.

وإن:

C_1، C_2، C_3: على التوالي تمثل ربح العملية الواحدة من أنواع العمليات الكبرى.

C_6، C_7، C_8: على التوالي تمثل ربح العملية الواحدة من أنواع العمليات الوسطى.

C_4، C_5 : هي المعاملات الأحادية* لأنواع العمليات الصغرى.

---

* تستخدم المعاملات الأحادية في حالتين، إحداهما:

- عندما يراد تعظيم حجم الإنتاجية بغض النظر عن الأرباح أو التكاليف، وتكتب عادة رياضياً بالشكل الآتي:

$$Maxf = \sum_{i=1}^{n} cixi = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n, \quad Such\ that\ ci = 1$$
$$= x_1 + x_2 + ... + x_n$$

- والأخرى عندما يراد تصغير حجم الإنتاجية من أنواع محددة من المنتجات (المتغيرات) حتى لو كانت منتجات خدمية، وتكتب عادة رياضياً بالشكل الآتي :

$$M\inf = \sum_{i=4}^{5} cixi = c_4x_4 + c_5x_5, \quad Such\ that\ c_4 = c_5 = 1$$
$$= x_4 + x_5$$

في حين:

a_{ij}: تمثل المعاملات الفنية الخاصة بالوقت المستغرق لكل عملية كبرى أو صغرى أو وسطى وبحسب نوع القيد.

b_1،b_2، b_3 : على التوالي تمثل مجموع الساعات المتاحة للجراحين الأخصائيين لجميع أنواع العمليات الكبرى والصغرى والوسطى.

b_4: تمثل مجموع الساعات المتاحة لجميع أنواع العمليات في صالة العمليات الخاصة بالمستشفى.

b_5،b_6 ،b_7 ،b_8 : تمثل قيود الطلب المختلفة وعلاقاتها بأنواع العمليات.

وبإدخال البيانات للأنموذج المصاغ يتكون لدينا الأنموذج التطبيقي الآتي:

$$\max f_1 = 140X_1 + 150X_2 + 120X_3$$

$$\min f_2 = 1X_4 + 1X_5$$

$$\max f_3 = 165X_6 + 145X_7 + 160X_8$$

$$S.T.$$

$$2X_1 + 1.8X_2 + 2.5X_3 \le 35 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$0.75X_4 + 1.2X_5 \le 25 \qquad \ldots\ldots (2)$$

$$1.4X_6 + 1.25X_7 + 1.4X_8 \le 30 \qquad \ldots\ldots (3)$$

$$2X_1 + 1.8X_2 + 2.5X_3 + 0.75X_4 + 1.2X_5 + 1.4X_6 + 1.25X_7 + 1.4X_8 \le 50 \qquad \ldots\ldots (4)$$

$$X_2 + X_3 = 10 \qquad \ldots\ldots (5)$$

$$X_4 + X_5 = 5 \qquad \ldots\ldots (6)$$

$$X_6 + X_7 \ge 8 \qquad \ldots\ldots (7)$$

$$X_8 \ge 2 \qquad \ldots\ldots (8)$$

$$all \quad x_i \ge 0 \quad and \quad I$$

خ 3 : إيجاد الحل للأنموذج

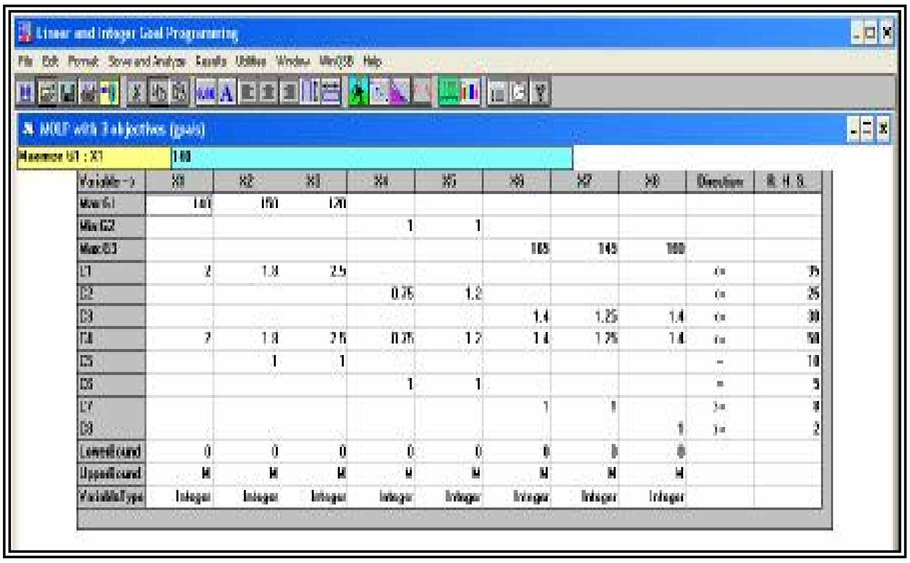
من الواضح جداً إن إيجاد الحل بطريقة .M.S.M يدوياً لأنموذج يحتوي على (3) دوال هدفية متعاقبة و(8) قيود و(8) متغيرات قرار) أمراً صعب جداً إن لم يكن مستحيلاً.

وبهذا لابد من استخدام الحاسوب لانجاز ذلك وأفضل الطرائق المحوسبة .Two – Phase R.M.S.M التي مر الكلام عنها نظرياً فيما سبق، ومن البرامج

= كما في أنموذجنا الحالي حيث يرغب متخذ القرار بتخفيض العمليات الصغرى بنوعيها x_4،x_5 بغض النظر عن التكاليف والأرباح.

الجاهزة الممكن استخدامها هو برنامج G P- I G P الموجود ضمن الحزمة البرمجية Q S B .

وعند إدخال البيانات الافتراضية للأنموذج على وفق أنموذج Matrix كانت المدخلات ممثلة بشكل ١ وكالاتي :

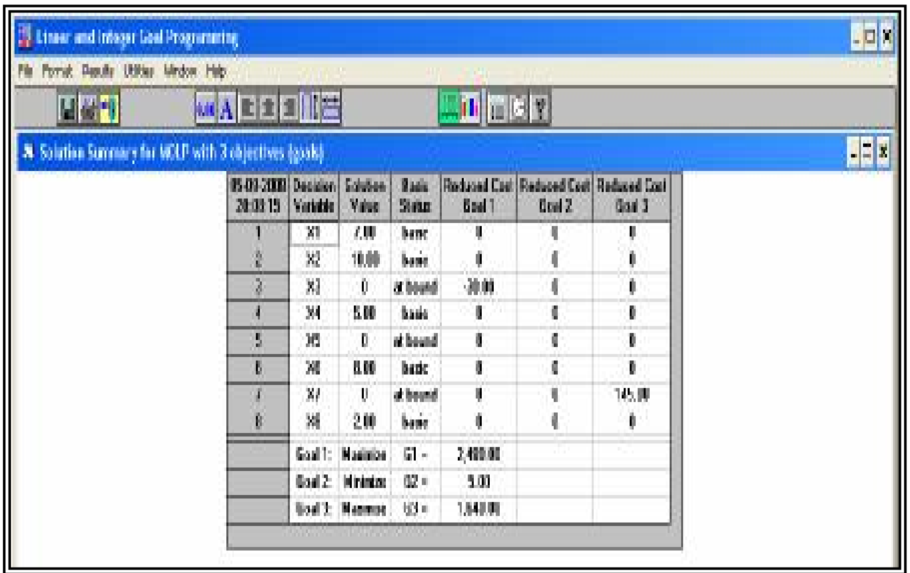


Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Direction	R. H. S.
Max:G1	140	150	120							
Min:G2				1	1					
Max:G3						165	145	160		
C1	2	1.8	2.5						<=	75
C2				0.75	1.2				<=	25
C3						1.4	1.25	1.4	<=	30
C4	2	1.8	2.5	0.75	1.2	1.4	1.25	1.4	<=	50
C5		1	1						=	10
C6				1	1				=	5
C7						1	1		>=	8
C8								1	>=	2
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer		

الشكل ١

مدخلات الأنموذج

وبعد حل الأنموذج كانت النتائج ممثلة بالشكل ٢ وعلى النحو الآتي:



05-09-2008 20:08:15	Decision Variable	Solution Value	Basis Status	Reduced Cost Goal 1	Reduced Cost Goal 2	Reduced Cost Goal 3
1	X1	7.00	basic	0	0	0
2	X2	10.00	basic	0	0	0
3	X3	0	at bound	-30.00	0	0
4	X4	5.00	basic	0	0	0
5	X5	0	at bound	0	0	0
6	X6	8.00	basic	0	0	0
7	X7	0	at bound	0	0	145.00
8	X8	2.00	basic	0	0	0
	Goal 1:	Maximize	G1 =	2,480.00		
	Goal 2:	Minimize	G2 =	5.00		
	Goal 3:	Maximize	G3 =	1,640.00		

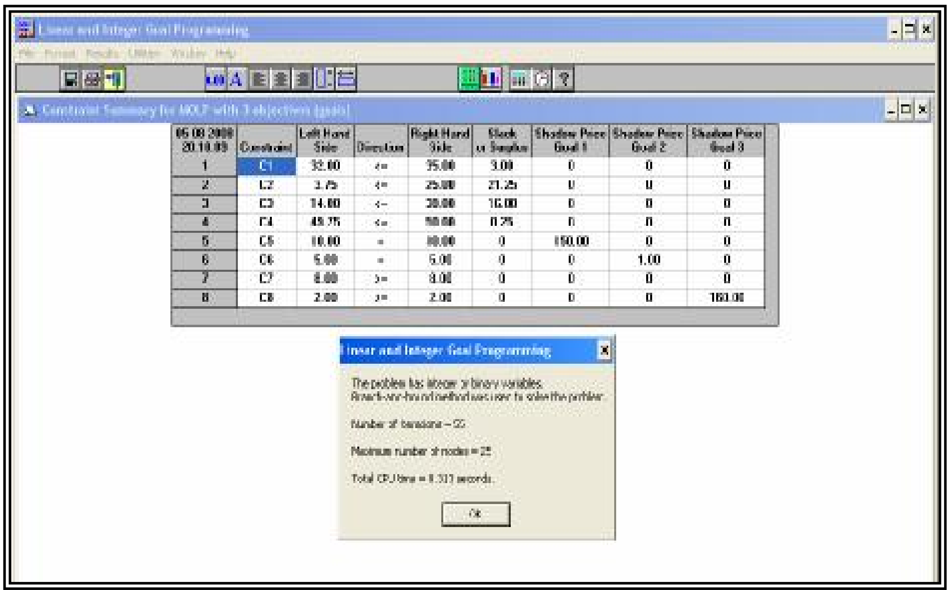
الشكل ٢

مخرجات المتغيرات والأهداف

~~وبتحليل نتائج الشكل ٢ الخاص بالحل النهائي نجد أن الحل الأمثل يمكن تمثيله~~ بمتجه:

$(7,10,5,0,8,0,2,\ maxf_1 = 2480\$,\ minf_2 = 5,\ maxf_3 = 1640\$)$ وهذا يعني أن المتغيرات X_1، X_2، X_4، X_6، X_8 يمكن أن يكون لها قيم بديلة، وهي متغيرات ستبقى أساسية في أي حل نهائي بديل آخر، لكن X_3، X_5، X_7 ستبقى ذات قيمة صفرية حتى في حلول أخرى.

أما نتائج القيود (Constraints Summary) فكانت بالشكل الآتي:



05.08.2008 20.10.09	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price Goal 1	Shadow Price Goal 2	Shadow Price Goal 3
1	C1	32.00	<=	35.00	3.00	0	0	0
2	C2	3.75	<=	25.00	21.25	0	0	0
3	C3	14.00	<=	30.00	16.00	0	0	0
4	C4	49.75	<=	50.00	0.25	0	0	0
5	C5	10.00	=	10.00	0	150.00	0	0
6	C6	5.00	=	5.00	0	0	1.00	0
7	C7	8.00	>=	8.00	0	0	0	0
8	C8	2.00	>=	2.00	0	0	0	160.00

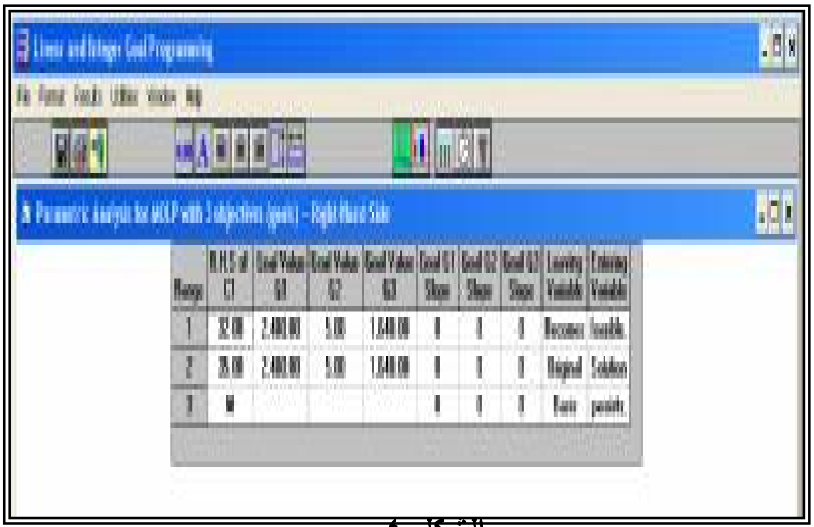
الشكل ٣

مخرجات القيود

وبتحليل نتائج الشكل ٣ نجد أن القيود C_1، C_2، C_3 الخاصة بالطاقات الإنتاجية المتاحة للكادر الطبي التخصصي مازال يوجد فيها فائض يقدر بـ (16, 25, 21, 3) ساعة عمل على التوالي. أما القيد الرابع والخاص بصالات العمليات لم يبقَ منه إلاّ أقل من 0.25 ساعة عمل، وهذا يعني أنه القيد الأكثر تأثيراً في الحل النهائي للأنموذج، ويمكن بزيادة طاقاته استغلال كل الطاقات الفائضة في القيود C_1، C_2، C_3، أما قيود الطلب C_5-C_8 فنلاحظ إمكانية تلبيتها بالكامل.

خ ٤: اختبار حل الأنموذج

إن التحليلات الممكن إجراؤها للأنموذج ضمن الحزمة البرمجية QSB تشمل القيود ودوال الأهداف أيضاً. ولو أخذنا تحليل القيد الأول على سبيل المثال لكان النتائج كالآتي:



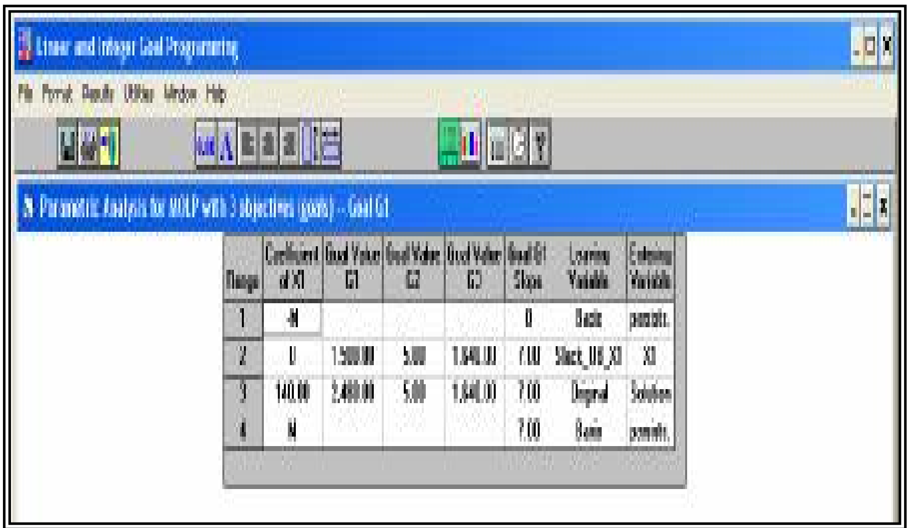
Range	R.H.S of C4	Goal Value G1	Goal Value G2	Goal Value G3	Goal G1 Slope	Goal G2 Slope	Goal G3 Slope	Leaving Variable	Entering Variable
1	32.00	2,480.00	5.00	1,640.00	0	0	0	Becomes	Infeasible
2	35.00	2,480.00	5.00	1,640.00	0	0	0	Original	Solution
3	M				0	0	0	Basis	possible

الشكل ٤

تحليل القيود

وبتحليل نتائج الشكل ٤ يمكن أن نلاحظ أن الحل الأمثل النهائي للدوال $(maxf_1=2480\$, minf_2 = 5, maxf_3 = 1640\$)$، لن يتغير حتى لو جرى تصغير حجم القيد من 35 ساعة إلى 32 ساعة لوجود القيد الرابع C_4 الأكثر تشدداً.

ولو أخذنا تحليل المتغير الأول على سبيل المثال للهدف الأول تكون لدينا النتائج الآتية:



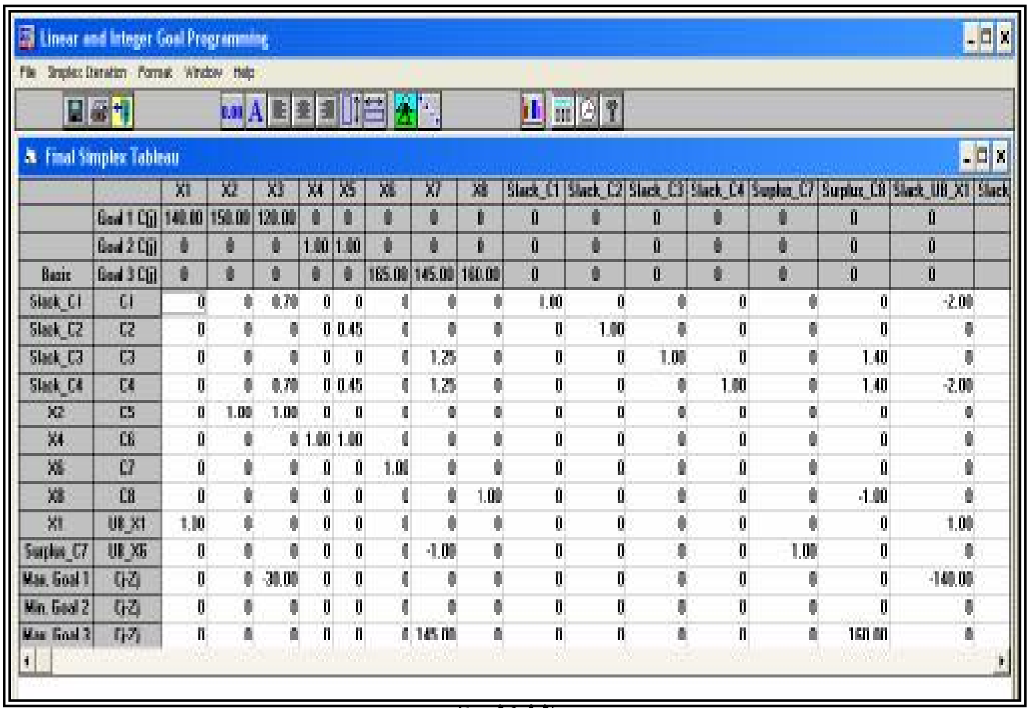
Range	Coefficient of X1	Goal Value G1	Goal Value G2	Goal Value G3	Goal G1 Slope	Leaving Variable	Entering Variable
1	-M				0	Basis	possible
2	0	1,500.00	5.00	1,640.00	7.00	Slack_UB_X1	X1
3	140.00	2,480.00	5.00	1,640.00	7.00	Original	Solution
4	M				7.00	Basis	possible

الشكل ٥

تحليل الأهداف والمتغيرات

وبتحليل نتـائج الـشكل ٥ الخـاص بالأهـداف والمتغيـرات يمكـن أن نلاحـظ أنـهُ بتغيير معامـل X_1 مـن 140 إلـى 0 فـإن هـذا سـيؤثر سلبياً فقط فـي الهـدف الأول G_1 بخفض إجمالي الأرباح من 2480$ إلى 1500$، ولا تـأثير لـه فـي الأهداف الأخرى G_2 وG_3.

أما جدول السمبلكس النهائي للمشكلة قيد الحل فكان كالآتي:



		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3	Slack_C4	Surplus_C7	Surplus_C8	Slack_UB_X1	Slack
	Goal 1 C(j)	140.00	150.00	120.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	Goal 2 C(j)	0	0	0	1.00	1.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Basic	Goal 3 C(j)	0	0	0	0	0	165.00	145.00	160.00	0	0	0	0	0	0	0	
Slack_C1	C1	0	0	0.70	0	0	0	0	0	1.00	0	0	0	0	0	-2.00	
Slack_C2	C2	0	0	0	0	0.45	0	0	0	0	1.00	0	0	0	0	0	
Slack_C3	C3	0	0	0	0	0	0	1.25	0	0	0	1.00	0	0	1.40	0	
Slack_C4	C4	0	0	0.70	0	0.45	0	1.25	0	0	0	0	1.00	0	1.40	-2.00	
X2	C5	0	1.00	1.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
X4	C6	0	0	0	1.00	1.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
X6	C7	0	0	0	0	0	1.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
X8	C8	0	0	0	0	0	0	0	1.00	0	0	0	0	0	-1.00	0	
X1	UB_X1	1.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.00	
Surplus_C7	UB_X6	0	0	0	0	0	0	-1.00	0	0	0	0	0	1.00	0	0	
Max. Goal 1	Cj-Zj	0	0	-30.00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-140.00	
Min. Goal 2	Cj-Zj	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Max. Goal 3	Cj-Zj	0	0	0	0	0	0	145.00	0	0	0	0	0	0	160.00	0	

الشكل ٦

جدول السمبلكس النهائي

وبتحليل نتائج الشكل ٦ الخاص بجدول السمبلكس النهائي المستخرج نلاحظ أن الأمثليـة للأسـبقية الـدنيا G_3 هـي أمثليـة غيـر تامـة، وإذا مـا أردنـا جعلهـا أمثليـة تامـة سيؤثر ذلك على ما تم إنجازه من أمثلية تامة في الأسبقيات العليا G_2 وG_1، وهـذا هـو جوهر ما يسمى بالحل غير السائد Non-Dominated Solution الذي يشكل حلاً أمثلاً لا يمكـن تغييـره نحـو الأفضـل إلاّ بالتـأثير سـلبياًَ علـى الأقـل فـي إحـدى الأسـبقيات المنجزة العليا التي جرى تحقيق الأمثلية لها.

خ 5 : التطبيق والمراقبة

مـن المؤكـد سـتكون مـن مـسؤولية إدارة المستـشفى والمحلـل الكمـي المقتـرح للأنموذج المستخدم لمتابعة التغيرات الحاصلة سواء في أسبقيات دوال الأهداف أو القيود أو المعالم الفنية للأنموذج.

الاستنتاجات

١. إن MOLP تعد أنموذجاً كفوء استحدث لتمثيل المشاكل المتعددة الدوال خاصة الخطية منها.
٢. استحدثت نماذج MOLP لغرض الحصول على أمثلية معجمية متعددة المعايير وليست أمثلية أحادية الجانب.
٣. في التطبيق العملي كان الحل الأمثل المعجمي النهائي للأنموذج عامة هو:
(7, 10, 0, 5, 0, 8, 0, 2, max f1 = 2480$, min f2 = 5, max f3 = 1640$)

التوصيات

١. التمثيل للنماذج MOLP يعد كفوء في مشاكل القرار المتعددة المعايير التي يمكن أن توضع لها أسبقيات معجمية تفضيلية (قبل البدء بحل المشكلة قيد الدراسة).
٢. استخدام نماذج MOLP في ميادين الإنتاج والسيطرة النوعية والنقل والتخصيص وغيرها من الميادين.
٣. الحل بأسلوب Two – Phase R.M.S.M. يعد الأفضل، لأنه يعالج مشاكل ونماذج أكثر شمولية وأكبر حجماً.

المراجع

أولاً- المراجع باللغة العربية

١. داود، عربية عبد الرحمن، "مقارنة نظرية وعملية بين طريقتي السمبلكس الاعتيادية والسمبلكس المعدلة مع تطبيق في مجال الصحة"، جامعة الموصل، ١٩٨٨.

ثانياً- المراجع باللغة الأجنبية

1. Barry Renderm Ralhp M. Stair, Jr. & Michael E. Hanna, "Quantitative Analysis for Management", 8^{th}.ed., 2003، Prentice-Hall, New Jersey, USA.
2. C. L. Hwang، S. R. Paidy، K. Yoon and A. S. M. Masud "Mathematical programming with multiple objectives: A Tutorial" ،"Computer and Operation Research", 1980, Vol.7
3. Charles A. Gallagher & Hugh J. Watson, "Quantitative Methods for Business Decisions", 1980، McGraw-Hill, Inc., USA.
4. Wayne L. Winston. "Operation research: Applications and algorithm", 1994, Duxbury Press, U. S. A.
5. Zeleny, M., "Multiple Criteria Decision Making", 1982, McGraw-Hill, Inc., USA.