مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الاقتصادية المجلد (24) العدد (11)2002
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Economic Science Series Vol (24) No (11) 2002

دراسة تجريبية لتقدير تباين متوسط المعاينة الطبقية المثلى

الدكتور عدنان محمود غانم*
الدكتور محمود محمد ديب طيوب**

(قبل للنشر في 2002/12/2)

□ الملخّص □

إن أحد الأهداف الرئيسية في مسوحات العينة لتقسيم المجتمع غير المتجانس المدروس إلى طبقات هو زيادة دقة التقدير وإن المتغير الأكثر تأثيراً في ذلك التقسيم هو متغير الدراسة ، ولكن هذا الأمر غير ممكن في بعض الأحيان ، لذلك فإن التقسيم إلى طبقات يكون عادة على أساس متغيرات مساعدة ذات ارتباط وثيق بمتغير الدراسة.

وإن هدف هذا البحث هو دراسة مشكلة الطبقية المثلى في اتجاهين :

الأول : عندما يكون متغير الطبقية مرتبطاً ارتباطاً وثيقاً بمتغير الدراسة، وذلك بافتراض وجود نموذج خطي بسيط وإعطاء طرائق تقريبية لإيجاد تباين متوسط الطبقية المثلى .

الثاني : عندما يكون متغيران مرتبطان بمتغيرات الدراسة وذلك بافتراض وجود نموذج خطي ثنائي المتغير باستخدام طريقتين تقريبيتين لإيجاد التباين الأصغر لمتوسط العينة.

بناءً على نتائج التقديرات، تبين أن استخدام أسلوب المحاكاة ، واعتماداً على كل من تباين متوسط المعاينة الطبقية والكفاءة النسبية كمقياسين للحكم على جودة التقدير أظهر أن الطريقة Cumf 3/4 لتقدير تباين متوسط المعاينة الطبقية باستخدام متغير مساعد وبزيادة عدد الطبقات حقق تبايناً أقل أو كفاءة نسبية أكبر مقارنة مع الطرق الأخرى لاسيما على المعاينة العشوائية البسيطة ، وستكون هذه المؤشرات أفضل باستخدام متغيرين مساعدين للطبقة .[1]

* أستاذ مساعد قسم الإحصاء والتأمين – كلية التجارة والاقتصاد –جامعة صنعاء –اليمن.ص ب: 13473
** أستاذ مشارك قسم الإحصاء والتأمين – كلية التجارة والاقتصاد– جامعة صنعاء –اليمن.ص ب: 13473

مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة العلوم الاقتصادية المجلد (24) العدد (11)2002
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Economic Science Series Vol (24) No (11) 2002

Experimental study for estimating of Variance mean in optimum stratified sampling .

Dr . GANEM ADNAN*
Dr . TayouB Mahmoud **

(Accepted 7/9/2001)

☐ ABSTRACT ☐

In Sample Surveys, one of the main reasons for dividing the population into strata, is the increase of the estimated precision. The most effective variable in that division is clearly the variable of interest itself, but this variable, sometimes , is impracticable , to use .Consequently stratification is usually based on additional variables which correlate strongly with the variable of interest. This Problem ,studied into two ways: Firstly, when the stratified variable correlates with the variable of interest by assuming simple linear model, and an approximate method has been suggested for finding the optimal variance of mean stratified sampling. Secondly the problem has been treated in the existence of two variables, which correlate with variable of interest, two approximate methods have been suggested for finding the minor variance of mean sampling.

To measure the quality of estimation a simulation method based on both , The mean variance of stratified sampling and the Proportional efficiency has been used .

The results show that when Cumf 3 ⁄4 method is used to estimate the mean variance of stratification by increasing number of strata kith help of auxiliary variables .

The value of variance is low and the value of Proportional efficiency is high in comparison with methods the simple random sampling method .

(*) Associate stat . Dep. Fac . Commerce et Economics . Uni . SANA'A. B. P. 13473
(**)Associate.stat. DePt . Fac .Commerce et Economics .Uni .SANA'A. B. P. 13473

مقدمة:

تهدف نظرية المعاينة Theory of Sampling إلى جعل المعاينة أكثر كفاءة واتساقاً وكفاية ، وتحاول تطوير طرائق لاختيار العينة وتحديد الحجم الأمثل للوصول إلى تقديرات ذات دقة عالية وبأقل التكاليف (cochran , 1977 والعلي 1980) ، مع الإشارة إلى إمكانية اختيار العينة على أسس عشوائية مختلفة منها قانون الاحتمالات وتسمى المعاينة الاحتمالية (FRON TIER, 1982) ،ولتحديد أسلوب المعاينة يجب على الباحث أن يدرس تجانس المجتمع من خلال دراسة سريعة أو من معلومات سابقة أو من خلال طبيعة تركيب المجتمع وأهداف البحث ومن ثم اختيار أسلوب المعاينة المناسبة ، لذا فقد توجه بعض الباحثين نحو تطبيق أسلوب المعاينة التجريبية وهو ما يعرف بأسلوب المحاكاة .

لقد تم تطبيق أسلوب المحاكاة بشكل واسع في مختلف مجالات الإحصاء وذلك من خلال دراسة الطرائق المختلفة وتطويرها بالمقارنة فيما بينها . ويمكن وصف المحاكاة بأنها أسلوب لحل المشاكل ، يعتمد بالأساس على تصميم نموذج مناظر للنظام الحقيقي (بيانات حقيقية) ، ينفذ على الحاسب الإلكتروني باستخدام مجموعة من العلاقات الرياضية والمنطقية بهدف تحديد سلوك النظام ضمن شروط ومعايير مختلفة لتشغيله ، وبما يساعد على توفير قاعدة من المعلومات تتمثل بمخرجات التجريب لتسهيل عملية اتخاذ القرار بشأن المشكلة المدروسة .

إن الهدف الأساس للمحاكاة هو الحصول على إحصائيات وثيقة بالموضوع قيد الدراسة التي يمكن أن تستخدم في وصف سلوك أنظمة المحاكاة ، إذ يشكل الأسلوب الذي يتم من خلاله الحصول على نوعية الإحصائيات بوساطة مراقبة الحالة على أساس مستمر عبر الوقت المحاكي . في حين تتميز المحاكاة المتقطعة بسهولة إبدال وتغيير أجزاء النظام المحاكي عند الحاجة إلى ذلك في أي نقطة من الوقت المحاكي .وتضم المحاكاة المندمجة كلاً من التغير المستمر والمتقطع في آن واحد ، إذ تحوي الكثير من الأنظمة الحقيقية كلاً النوعين من التغير (Lawedal , 1991) و (Morgan , 1987) .

وتعد المحاكاة التصادفية Stochastic Simulation نوعاً آخر من التغيير ، يتمثل بالتغيير الناتج عن التوزيع العشوائي في النظام . وهكذا فإن الحل لهذه المشاكل يتمثل في اختيار قيم عشوائية للحصول على سلسلة من القيم تعطي نفس المميزات ، ويتم ذلك باستخدام المحاكاة مونتي كارلو Monte Carlo Simulation وهي عبارة عن طريقة أخذ عينات عشوائية من توزيع متغير واحد للحصول على سلسلة من القيم لاستخدامها في النموذج . وهي أسلوب توليد الأعداد لتشغيل عملية المحاكاة ، أي إن هذه الطريقة يمكن وصفها بأنها أسلوب لاختيار أرقام عشوائية من توزيع احتمالي لاستخدامها في الدورة التجريبية للمحاكاة . وتسمى محاكاة مونتي كارلو كذلك بمعاينة المحاكاة Simulation Sampling ، وهو اسم أعطى لهذه الطريقة التي تولد تيارات من الأرقام العشوائية التي تستخدم مع أي توزيع احتمالي مرغوب .

إذ يتم برمجة الحاسبة الإلكترونية لتوليد قيم الأرقام العشوائية ونقلها إلى قيم متغير المحاكاة . وتكون هذه الأرقام أساساً للحصول على العينات من أيٍّ من التوزيعات الاحتمالية المفضلة . وهذا الأسلوب هو الأساس الذي يستخدم لتوليد الأرقام العشوائية ويعرف بطريقة التحويل المعكوس Inverse Transformation Method وهو الأسلوب الأسهل والأكثر شيوعاً من بين الأساليب المستخدمة لتوليد الأرقام العشوائية ، إذ يستخدم المعلومات التي فيها المتغير العشوائي $y = f(x)$ يتوزع توزيعاً منتظماً على المجال $(0, 1)$ ، إذ إن الرقم العشوائي يتم توليده وجعله على شكل تابع التوزيع : $u = F(x)$ ، أي إن $F(x)$ دالة غير متناقصة لـ x . والدالة المعكوسة $F^{-1}(x)$ يمكن تعريفها لأي قيمة لـ u بين 0 و 1 أي إن :

$$\Pr(U \le u) = \Pr(F(x) \le u) = \Pr[X \le F^{-1}(u)]$$
$$= F[F^{-1}(u)] = u$$

وعليه فإن u موزعه بصورة منتظمة في المجال $(0, 1)$. علماً أن هذا الأسلوب يمكن أن يستخدم للحصول على عينات من أي توزيع احتمالي (الحسيني وهندي و 1995)، وذلك بإجراء بعض التحويلات المناسبة .

إذاً إن دقة التقدير في المعاينة العشوائية يتوقف على حجم العينة وتباين المجتمع المدروس . ويمكن وضع بعض القيود على هذه المعاينة للزيادة من دقة التقدير وذلك بالتقليل من تأثير عدم التجانس عن طريق تقسيم المجتمع إلى طبقات متجانسة والمعاينة تتم بشكل مستقل في هذه الطبقات مع ضرورة تحديد أحجامها ، كما أن اختيار عينة من كل طبقة يتطلب وجود إطار محدد لكل طبقة على حدة .

1- مشكلة البحث :

تكمن مشكلة هذا البحث في دراسة مشكلة تباين المعاينة الطبقية المثلى من خلال معالجة مشكلتين أساسيتين هما :

المشكلة الأولى : إيجاد الطبقية المثلى التي تجعل تباين متوسط الطبقية أقل ما يمكن في حالتين :

أولاً : عندما يكون متغير الطبقية يرتبط ارتباطاً وثيقاً بمتغير الدراسة بافتراض نموذج خطي بسيط ، وإعطاء طرائق تقريبية لإيجاد تباين متوسط الطبقية المثلى ، باستخدام حصص التوزيع المتناسب Proportional Allocation والتوزيع المتساوي Equal Allocations والتوزيع الأمثل optimal Allocation من خلال اقتراح طريقة تقريبية ومقارنتها مع طرق أخرى .

ثانياً : هي معالجة المشكلة عند وجود متغيرين يرتبطان بمتغير الدراسة بافتراض نموذج خطي ثنائي المتغير Model Bivariate Linear وذلك باقتراح طريقتين تقريبيتين لإيجاد التباين الأمثل لمتوسط العينة .

المشكلة الثانية : تكمن في دراسة توزيع حجم العينة الأمثل لحالة الطبقية متعددة المتغيرات باستخدام التوزيع المتناسب والتوزيع الأمثل .

2- هدف البحث :

إن الهدف الرئيسي لهذا البحث هو تقليل تباين المقدِّرات في المعاينة الطبقية وذلك عن طريق اختيار أفضل الحدود الطبقية التي تسعى إلى جعل التباين الخاص بالمقدِّر ينخفض إلى الحد الأدنى بمعلومية نوع التوزيع وهذا ما يعرف بالطبقية المثلى optimum Stratification

3- الدراسات السابقة :

شغلت مشكلة الطبقية المثلى الباحثين منذ منتصف القرن المنصرم وإن أول من درسها (Dalenius et,Gurney , 1951) وكذلك (Dalenius etHodges ; 1959) فحُددت النقاط الطبقية لذلك التباين في المعاينة الطبقية الذي يكون في حده الأدنى بشرط أن يكون مخطط المعاينة وعدد الطبقات ومنهج التوزيع محدد مسبقاً ويعتبر تباين المعاينة هو دالة هذه النقاط الطبقية وقد طور (Ghosh ; 1963) نظرية Dalenius للطبقية ذات المتغير الواحد إلى متغيرين ، حيث اخذ التباين العام لأوساط العينة كمقياس لدقة خصائص المتغيرين وأطلق عليه نظام الطبقية بالطبقية المثلى إذا كان التباين العام لأوساط العينة أصغر ما يمكن ،ومثلت الطبقية المثلى بخطوط مستقيمة موازية للمحور ، وداخل هذه الحالة حُددِّ نقاط لتلك الطبقية المثلى بافتراض تحديد عدد الطبقات وإن توزيع المعاينة هو التوزيع المتناسب.

لقد برهن (Tago , 1967) ووفقاً للتوزيع المتناسب أن الطبقية المثلى لتقدير المتغير y على أساس المتغير المساعد Auxiliary Variable فأعطى نتائج متقاربة جداً وفي حالة أكثر من متغير أوضح (Chatterjee, 1963) أنه إذا كانت التباينات للمتغيرات المختلفة مرتبطة ارتباطاً موجباً فأن التوزيع الأمثل لأحد الخصائص سيكون ذا كفاءة بشكل معقول

بالنسبة للخصائص الأخرى وإذا كانت الخصائص غير مرتبطة أقترح الباحث تقسيم العينة بين مختلف الطبقات بنسب حسب الخصائص قيد الدراسة .

وبهذا الصدد أوجد (Yates , 1981) ، مقياساً على أساس تقليص التكلفة الكلية إلى حدها الأدنى بشرط أن التقديرات بمختلف الخصائص مساوية إلى كميات معينة محددة سلفاً ، وهذا المقياس يفترض أن عدد الطبقات أكبر من الخصائص المدروسة ، وهذا ما أكده كل من (Kish etAndecson , 1978) . كما نشر (Serfling , 1968) بحثاً وظف فيه طريقة Dalenius et Hodges التقريبية $\mathbf{Cum}\sqrt{\mathbf{f}(\mathbf{x})}$ * لتقريب تقدير تباين الطبقية للمتغير المساعد x بأسلوب المعاينة العشوائية الطبقية على أساس أنه اختيار أمثل لعدد الطبقات وحجم العينة الكلي عند ثبات التكلفة ، لكن (Singh 1971 ,) اقترح طريقة جديدة للحصول على الطبقية المثلى وذلك بإيجاد الحدود الطبقية المثلى التقريبية بالاعتماد المتغير المساعد x وهي طريقة $\mathbf{Cum}\sqrt[3]{\mathbf{f}(\mathbf{x})}$ مفترضاً حساب انحدار y على x وأيضاً العينة لدالة التباين الشرطي V(y / x) وذلك للحصول على الطبقية المثلى عند ثبات التكلفة الكلية .

لقد أفترض (Anderson, 1976) أن تقدير المتغير y ومتغير الطبقية x لهما توزيع طبيعي ثنائي Bivariate Normal Distribution. وتم الحصول على الحدود الطبقية المثلى التي بتغير معامل الارتباط (P) بواسطة توزيع نيمان ،وهذه الحدود قورنت بالحدود المثلى التقريبية الحاصل عليها بطريقة $\mathbf{Cum}\sqrt{\mathbf{f}(\mathbf{x})}$ *وطريقة $\mathbf{Cum}\sqrt[3]{\mathbf{f}(\mathbf{x})}$ وبَيَّن أن الأولى أفضل من الأخرى . كما درس (Thompson, 1977) تأثير استخدام متغيرين مساعدين للطبقية (x_1 , x_2) واختار نقاط حدية بحيث إنها خلقت فترات متساوية على الطريقة L = 1,2 ، أي $\mathbf{Cum}\sqrt{\mathbf{f_1}(\mathbf{x_1})}$ حيث أن f_1 (x_1) هي دالة الكثافة الهامشية وقدم تقريباً لمتغير الدراسة y تحت فرضية النموذج الخطي ثنائي الطبقية لطريقة $\mathbf{Cum}\sqrt[3]{\mathbf{f}(\mathbf{x_i})}$ حيث i = 1 , 2 إذ تم حساب التباين التقريبي لمتغير الدراسة من خلال وجود علاقة خطية بين هذا المتغير ومتغيري الطبقية ، أعتمد هذا التقريب على عدد الطبقات وعلى دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لمتغيري الطبقية وعلى العلاقة بين متغير الدراسة وكل من متغيري الطبقية وفي هذا الإطار إفترض الباحث (Brewer , 1999) أن استراتيجية المعاينة تكون باستخدام تصميم المعاينة الطبقية ومقدِّر النسبة التقليدي معاً ، وأنه داخل كل طبقة أعطى إمكانية الاختيار بين المعاينة العشوائية البسيطة والمعاينة المتزنة البسيطة واستنتج أن المعاينة المتزنة أفضل من حيث الكفاءة والحصانة ، ولكن التصميم العشوائي يمتلك افضليات متوازية تكمن في بساطة وسهولة الاختيار ، داخل كل طبقة وقد استخدم مقدِّر الانحدار العام بدلاً من مقدِّر النسبة التقليدي .

- استراتيجية المعاينة الطبقية المثلى :

إنّ الغاية من استخدام الطبقية في مسوح العينة هو التقليل من تباينات مقدرات المتوسط في المعاينة العشوائية البسيطة من خلال اختيار المتغيرات الطبقية وحساب عدد الطبقات وتحديد حدودها ،وتعالج المعاينة الطبقية المثلى كيفية تحديد الحدود المثلى بحيث تجعل تباين المقدرات في حده الأدنى بمعلومية نوع التوزيع . وسوف نتناول استراتيجية الطبقية المثلى لحالتي المتغير الواحد ومتعدد المتغيرات ، فندرس استخدام المتغيرات المساعدة لمتغير الدراسة ، مفترضين معرفتنا بصيغ النماذج الخطية . باقتراح طرائق تقريبية للحدود الطبقية المثلى لجعل تباين متوسط الطبقية أصغر ما يمكن لحالة وجود متغير مساعد واحد ، أوعند وجود متغيرين من متغيرات الطبقية يرتبطان خطياً بمتغير الدراسة .

- بناء الطبقات والحدود الطبقية المثلى :

***حيث أن الرمز $\mathbf{Cum}\sqrt{\mathbf{f}(\mathbf{x})}$ يعني التكامل أو المجموع التجميعي المتصاعد لجذر قانون التوزيع f (x)**

إنّ أفضل الطرائق لبناء الطبقات هو أن نقسمها بالنسبة إلى الخاصية التي نريد قياسها فإذا صعب عملياً هذا التقسيم يمكن محاولة التقسيم باستخدام متغير يرتبط مع المتغير الأصلي ارتباطاً وثيقاً ، وهذا يؤدي إلى تصغير التباين . ومن المعروف إنه كلما قسمنا المجتمع إلى عدد أكبر من الطبقات كبر التشابه بين الوحدات في الطبقة وصغرت قيمة التباين الطبقي . لهذا فإننا نتوقع أنّ دقة التقدير تزداد كلما زاد عدد الطبقات ، وهذا لا يعني أن هذا الأمر مطلق بصورة عامة إذ نصل إلى قيمة لـ L يصبح تباين حد الخطأ هو المسيطر ، وسوف لا تنتج أي زيادات أخرى في عدد الطبقات وبعد تقسيم المجتمع تحت الدراسة إلى L من الطبقات استنتج (Dalenius, 1959) المعادلات التي تقدم أفضل حدود للطبقات ، كما قدّم عدد من الباحثين طرائق أسرع . ويستخدم التوزيع الأمثل باعتباره متفوقاً على التوزيعين المتناسب والمتساوي في مجتمعات تكون فيها فوائد التقسيم إلى طبقات كبيرة ونفرض أولاً أن الطبقات مقسمة لحالة كون متغير الدراسة هو متغير الطبقية نفسه . ليكن y_0 و y_L أصغر وأكبر قيم المجتمع ، إذ أن Y متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية (f(y)) معرفة ضمن المجال [a , b] ، فإن الحدود الداخلية للطبقات تعرف بـ y_1 , y_2 , …, y_{L-1} حيث إن $a = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots\ldots < y_L = b$ ،ولقد وجدت هذه الحدود الطبقية y_h بحيث تجعل تباين متوسط المعاينة الطبقية أقل ما يمكن . لذا يتم إيجادها بأخذ مشتقة التباين بالنسبة لهذه الحدود ثم مساواتها بالصفر ، فنحصل على مجموعة المعادلات الآتية :

$$\frac{\left(y_h - \mu_h\right)^2 + S_h^2}{S_h} = \frac{\left(y_h - \mu_{h+1}\right)^2 + S_{h+1}^2}{S_{h+1}} \qquad (1)$$

$$y_h = \frac{\left(\mu_h + \mu_{h+1}\right)}{2} \qquad , h = 1, 2, \ldots\ldots, L-1$$

حيث أن

$$\mu_h = \frac{1}{W_h} \int_{y\,h-1}^{y\,h} y\, f\left(y\right) d\,y$$

$$S_h^2 = \frac{1}{W_h} \int_{y\,h-1}^{y\,h} y\, f\left(y\right) d\,y - \mu_n^2$$

$$W_h = \frac{1}{W_h} \int_{y\,h-1}^{y\,h} x\, f\left(y\right) d\,y$$

إن حل مثل هذه المعادلات في (1) بصورة مباشرة غير ممكن لأن y_h يعتمد في حسابه على μ_h , S_h^2 كما أن μ_h , S_h^2 يعتمدان في حسابهما على y_h ، وعليه فإن الحل الدقيق لهذه المعادلات يتطلب طرائق تكرارية معقدة . لذا تم اللجوء إلى طرائق تقريبية لإيجاد الحدود الطبقية المثلى .

كما أن هذه المسألة درست باستخدام وجود متغير مساعد Auxiliary Variable بوصفه متغير الطبقية يرتبط ارتباطاً خطياً بمتغير الدراسة واعتماد التوزيع المتساوي ثم التوزيع المتناسب والتوزيع الأمثل من قبل عدد من الباحثين مثال (Thompson, 1976 , Serfling, 1968 .) مع افتراض أن متغير الدراسة y ومتغير الطبقية x مرتبطان بالعلاقة الخطية الآتية :

$$y = \gamma\left(x\right) + \varepsilon \qquad (2)$$

إذ إن $E\left(\varepsilon / x\right) = 0$, $V\left(\varepsilon / x\right) = S_\varepsilon^2$ ، وإن $\gamma\left(x\right) = \alpha + \beta x$. ومن النموذج أعلاه نجد أن التباين للمتغير y في الطبقة h يكون :

$$S_{yh}^2 = \beta^2 S_{xh}^2 + S_{\varepsilon h}^2 \qquad (3)$$

ويصبح تباين متوسط المعاينة الطبقية باستخدام التوزيع الأمثل عند إهمال كسر المعاينة

$$V_{opt}\left(\bar{y}\right)=\frac{1}{n}\left[\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\beta^2 S_{xh}^2+S_{\varepsilon h}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

ومن الصيغة أعلاه يمكن إيجاد الحدود الطبقية المثلى y_i وذلك بأخذ مشتقة التباين بالنسبة لهذه الحدود ومساواتها بالصفر ، نجد أن

$$\frac{2}{n}\sum_h W_h\left(\beta^2 S_{xh}^2+S_{\varepsilon h}^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_h}\left[\sum_h W_h\left(\beta^2 S_{xh}^2+S_{\varepsilon h}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]=0$$

وبما أن x_h تظهر في طبقتين فقط فإن :

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left[W_h\left(\beta^2 S_{xh}^2+S_{0h}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{\partial}{\partial x_h}W_h\left(\beta^2 S_{\varepsilon h}^2+S_{0h}^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\partial}{\partial x_h}W_{h+1}\left(\beta^2 S_{x.h+1}^2+S_{\varepsilon.h+1}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

ومن أعلاه نجد أن :

$$\frac{\partial}{\partial x_h}W_h\left(\beta^2 S_{xh}^2+S_{0h}^2\right)^{\frac{1}{2}}=W_h\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\beta^2 S_{xh}^2+S_{0h}^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\beta^2 S_{x.h+1}^2+S_{\varepsilon.h+1}^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial W_h}{\partial x_h} \quad (5)$$

وإذا كانت $f(x)$ دالة توزيع x فإنه يكون :

$$\left.\begin{aligned}&W_h=\int_{x_{h-1}}^{x_h} f(x)\,dx \quad , \quad \frac{\partial W_h}{\partial x_h}=f\left(x_h\right)\\&W_h S_h^2=\int_{x_{h-1}}^{x_h} x^2 f(x)\,dx-\frac{\left[\int_{x_{h-1}}^{x_h} x f(x)\,dx\right]^2}{\int_{x_{h-1}}^{x_h} f(x)\,dx}\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

وباستخدام العلاقة (6) أعلاه في إجراء اشتقاقات حدي العلاقة (4) نجد أن :

$$\frac{\partial}{\partial x_h}W_h\left(\beta^2 S_{xh}^2+S_{0h}^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}f(x)\left[\frac{\beta^2\left(x_h-\mu_h\right)^2+\left(\beta^2 S_{xh}^2+2S_{0h}^2\right)}{\sqrt{\left(\beta^2 S_{xh}^2+S_{0h}^2\right)}}\right]$$

وبصورة مماثلة نجد أن :

$$\frac{\partial}{\partial x_h}W_{h+1}\left(\beta^2 S_{x\cdot h+1}^2+S_{\varepsilon\cdot h+1}^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}f(x)\left[\frac{\beta^2\left(x_{h+1}-\mu_{h+1}\right)^2+\left(\beta^2 S_{x\cdot h+1}^2+S_{\varepsilon\cdot h+1}^2\right)}{\sqrt{\left(\beta^2 S_{x\cdot h+1}^2+S_{\varepsilon\cdot h+1}^2\right)}}\right]$$

ومن ثَمَّ تكون المعادلات الحسابية لـ x_h هي :

$$\frac{\beta^2\left(x_h-\mu_h\right)^2+\left(\beta^2 S_{xh}^2+2S_{\varepsilon h}^2\right)}{\sqrt{\left(\beta^2 S_{xh}^2+S_{\varepsilon h}^2\right)}}=\frac{\beta^2\left(x_{h+1}-\mu_{h+1}\right)^2+\left(\beta^2 S_{x\cdot h+1}^2+2S_{\varepsilon\cdot h+1}^2\right)}{\sqrt{\left(\beta^2 S_{x\cdot h+1}^2+S_{\varepsilon\cdot h+1}^2\right)}}$$

إذاً إن S^2_{xh} , μ_h هما المتوسط والتباين للمتغير x في الطبقة h . ويلاحظ أن هذه هي تقريباً النقاط المثلى للمتغير x . وإذا كان $S_{\varepsilon h}$ صغيراً مقارنة بـ $|\beta|S_{xh}$ لكل الطبقات (Ronaldo, 1985) ، فإن هذه المعادلات تختصر على الشكل الآتي :

$$\left.\begin{aligned} \frac{(x_h+\mu_h)+S^2_h}{S_h} &= \frac{(x_h-\mu_{h+1})^2+S^2_{h+1}}{S_{h+1}} \\ x_h &= \frac{(\mu_h-\mu_{h+1})}{2} \quad , \quad h=1,2,\dots\dots\dots, L-1 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

وبالنظر لعدم إمكانية حل هذه المعادلات فقد استخدمت الطرائق التقريبية الآتية :

- الطرائق التقريبية لتقدير تباين متوسط المعاينة الطبقية :

إن أفضل صفة مميزة عند بناء الطبقات هي التوزيع الاحتمالي لمتغير الدراسة . وفي بعض الأحيان يكون من الأفضل استخدام التوزيع الاحتمالي لمتغير آخر يرتبط مع متغير الدراسة بصورة عالية ، وبمعرفة عدد الطبقات يتم تحديد الحدود الطبقية المثلى باستخدام طرائق تقريبية لإعطاء صيغ لتباين متوسط المعاينة الطبقية . وإن استخدام هذه الصيغ التقريبية لتباين $V(\bar{y}_{St})$ لها بعض الفوائد منها :

a - تمكننا من تحديد اختيار حجم العينة n وعدد الطبقات L بشكل دقيق في حالة كون التكلفة ثابتة .

b - تمكننا من مقارنة التباين لمتوسط المعاينة الطبقية مع الطرائق الأخرى .

وقد وضع (Sethi, 1963) جداول الحدود المثلى لتوزيع أمثل أو متساوٍ أو متناسب لحجوم العينات وذلك في حالة التوزيع الطبيعي والتوزيعات الاحتمالية المختلفة لمتحول الدراسة. وإذا ظهر أن أحد هذه التوزيعات يمثل بشكل تقريبي المجتمع موضع الدراسة فيمكن قراءة الحدود من جداول Sethi.كما استخدم الطرائق التقريبية عدد من الباحثين الآخرين وهم

- (Serfling , 1968) الذي استخدم طريقة $\text{Cum } f^{1/2}(x)$ التقريبية بالاعتماد على النموذج وعلى التوزيع المتساوي وأوجد أن تباين متوسط المعاينة الطبقية يساوي:

$$V_{Eq}(\bar{y}_{St}) = \frac{S^2_y}{n}\left[\frac{K^4(x)\rho^2}{12L^2S^2_x} + K(x)K^*(x)(1-\rho^2)\right] \qquad (8)$$

حيث أن ρ : هو معامل الارتباط بين متحول الدراسة y والمتحول المساعد x فإن

$$K(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\frac{1}{2}}(x)\,dx \qquad , \qquad K^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\frac{3}{2}}(x)\,dx$$

- أوجد (Thompsen , 1976) تباين متوسط المعاينة بطريقة $\text{Cum } f^{1/3}(x)$ التقريبية بالاعتماد على التوزيع المتناسب .

$$V_{ProP}(\bar{y}_{St}) = \frac{S^2_y}{n}\left[\frac{H^3(x)\rho^2}{12L^2S^2_x} + (1-\rho^2)\right] \qquad (9)$$

حيث أن:

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\frac{1}{3}}(x)\,dx$$

• في حين درس (AL - Kassab , 1994) طريقة (x) Cum $f^{2/3}$ بالاعتماد على التوزيع الأمثل وأوجد أن تباين متوسط المعاينة الطبقية :

$$V_{OPt}\left(\bar{y}_{St}\right)=\frac{S_y^2}{n}\left[\frac{M^3(x)\rho^2}{12L^2S_x^2}+M^3(x)\left(1-\rho^2\right)\right] \quad (10)$$

حيث أن:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f^{\frac{2}{3}}(x)dx$$

* الطريقة المقترحة :

بعد الإطلاع على الطرائق التقريبية المذكورة أعلاه نقترح استخدام طريقة (x) Cum $f^{3/4}$ لإيجاد الحدود الطبقية المثلى بهدف الحصول على أقل تباين لمتوسط الطبقية مستخدمين حصص التوزيع المتساوي والمتناسب والأمثل كما يلي :

1– حالة التوزيع المتناسب Proportional Allocation

لنفرض أن

$$\Phi(x)=\int_a^b f^{\frac{3}{4}}(x)dx \quad (11)$$

وبالتركيز على المجال [a , b] لأن f (x) خارج هذه المجال يكون مساوياً للصفر ، وأن الحدود بين الطبقات هي $x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots < x_{L-1}$ والتي تعرف ببناء L من الطبقات داخل المجال [a , b] حيث أن $x_0 = a$ ، $x_L = b$ وبتجزئة (x) Cum $f^{3/4}$ إلى توابع معرفة على مجالات جزئية Ranges متساوية كما يلي :

حيث أن:

$$\Phi_h(x)=\int_{x_{h-1}}^{x_h}f^{\frac{3}{4}}(x)dx \qquad , h=1,2,\ldots\ldots,L-1 \quad (12)$$

وعلى افتراض أن μ_h يمكن تقريبها داخل الطبقة h بقيمتها المتوسطة $\mu_h=\left(x_h+x_{h-1}\right)/2$ فإن W_h تصبح :

$$W_h(x)=\int_{x_{h-1}}^{x_h}\mu_h(x)dx=\mu_h\left(x_h-x_{h-1}\right) \quad (13)$$

أما تباين الطبقة h فيكون :

$$S_h^2=\frac{1}{W_h}\int_{x_{h-1}}^{x_h}\mu_h\,dx-\mu_h^2=\frac{\mu_h}{3W_h}\left(x_h^3-x_{h-1}^3\right)-\mu_h^2$$

وبالتعويض عن قيمة كلٍ من μ_h و W_h نجد أن :

$$S_h^2=\frac{\left(x_h-x_{h-1}\right)^2}{12} \quad (14)$$

وعليه فإن الدالة التجميعية (x) Cum $f^{3/4}$ للطبقات تصبح :

$$\Phi_h(x)=\int_{x_{h-1}}^{x_h}\mu_h^{3/4}\,dx=\mu_h^{3/4}\left(x_h-x_{h-1}\right)$$

ومن ثَمَّ يكون :

$$\mu_h = \frac{\Phi_h^{\frac{4}{3}}(x)}{(x_h - x_{h-1})^{\frac{4}{3}}} \qquad (15)$$

بالتعويض في تباين متوسط المعاينة الطبقية للتوزيع المتناسب نجد أن :

$$V_{ProP}(\bar{y}_{St}) = \frac{1}{n}\sum_h W_h\left(\beta^2 \sigma_{hx}^2 + S_\varepsilon^2\right)$$

وباستخدام التقريبات الواردة أعلاه يكون :

$$V_{ProP}(\bar{y}_{St}) = \frac{1}{n}\left[\sum_h \mu_h (x_h - x_{h-1})\, \beta^2 \frac{(x_h - x_{h-1})^2}{12} + S_\varepsilon^2\right]$$

وبالتعويض عن قيمة μ_h بما تساويها نحصل على :

$$V_{ProP}(\bar{y}_{St}) = \frac{1}{n}\left[\frac{\sum_h \Phi_h^{\frac{4}{3}}(x)}{(x_h - x_{h-1})^{\frac{1}{3}}}\beta^2 \frac{(x_h - x_{h-1})^2}{12} + S_\varepsilon^2\right] \qquad (16)$$

وتصبح العلاقة (16) أقل ما يمكن عندما يكون $\Phi_h(x)$ ثابتاً لجميع قيم h ونحلها باستخدام طريقة لاغرانج تحت قيد إن $\sum_h \Phi_h(x) = \Phi(x)$ هو شرط مستقل عند اختيار حدود الطبقات ، أي إن $\Phi_h(x) = \Phi(x)/L$. وفي هذه الحالة يصبح تباين المتوسط الطبقي :

$$V_{ProP}(\bar{y}_{St}) = \frac{1}{n}\left[\frac{\sum_h \Phi_h^{\frac{4}{3}}(x)\beta^2}{12L^2} + S_\varepsilon^2\right]$$

ومن علاقة النموذج (2) نجد أن $\beta^2 = \rho^2 S_y^2 / S_x^2$ وكذلك $S_\varepsilon^2 = (1-\rho^2)S_y^2$ حيث أن ρ هو معامل الارتباط بين المتغيرين X ، Y ومن ثَمَّ فإن :

$$V_{ProP}(\bar{y}_{St}) = \frac{S_y^2}{n}\left[\frac{\sum_h \Phi_h^{\frac{4}{3}}(x)\rho^2}{12L^2 S_x^2} + (1-\rho^2)\right] \qquad (17)$$

2 – <u>حالة التوزيع المتساوي :</u> Equal Allocation

لو فرضنا أن

$$\Psi_h(x) = \int_{x_{h-1}}^{x_h} f^{\frac{3}{4}}(x)\,dx \qquad , h = 1, 2, \ldots\ldots, L-1 \qquad (18)$$

وأن الأوزان الطبقية W_h والتباين الطبقي S_h^2 والدالة التجميعية Cum $f^{3/4}$ (x) للطبقات التقريبية كما هي معرفة في العلاقة (1) . وعلى افتراض استخدام النموذج الخطي (2) ففي حالة التوزيع المتساوي يكون $n_h = n / L$ ، وعليه فإن تباين متوسط الطبقية عند إهمال كسر المعاينة يأخذ الصيغة الآتية :

$$V_{Eq}(\bar{y}_{St}) = \frac{L}{n}\sum_h W_h^2\left(\beta^2 S_{hx}^2 + S_\varepsilon^2\right) = \beta^2 V_{ar}(\bar{x}_{St}) + \frac{L}{n} S_\varepsilon^2 \sum_h W_h^2$$

وباستخدام التقريبات الواردة في حالة التوزيع المتناسب تصبح العلاقة أعلاه

$$V_{Eq}\left(\bar{y}_{St}\right)=\frac{S_y^2}{n}\left[\frac{\Psi^{\frac{8}{3}}\left(x\right)\rho^2}{12L^2 S_x^2}+\left(1-\rho^2\right)L\sum_h W_h^2\right] \qquad (19)$$

وأن الصيغة التقريبية للمقدار $L\sum_h W_h^2$ يمكن كتابتها بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} L\sum_h W_h^2 &= L\sum_h \mu_h^2\left(x_h-x_{h-1}\right)^2 \\ &= L\sum_h \Psi_h\left(x\right)\mu_h^{\frac{5}{4}}\left(x_h-x_{h-1}\right) \\ &= \Psi\left(x\right)\sum_h \mu_h^{\frac{5}{4}}\left(x_h-x_{h-1}\right) \end{aligned}$$

والمجموع في الطرف الأيمن من العلاقة أعلاه كصيغة تقريبية لتكامل الدالة $f^{5/4}\left(x\right)$ وعليه فإن :

$$L\sum_h W_h^2=\Psi\left(x\right)\Psi^*\left(x\right)$$

حيث أن:

$$\Psi^*\left(x\right)=\int_a^b f^{\frac{5}{4}}\left(x\right)dx$$

وعليه يمكن إعادة كتابة الصيغة (19) كما يلي :

$$V_{Eq}\left(\bar{y}_{St}\right)=\frac{S_y^2}{n}\left[\frac{\Psi^{\frac{8}{3}}\left(x\right)\rho^2}{12L^2 S_x^2}+\Psi\left(x\right)\Psi^*\left(x\right)\left(1-\rho^2\right)\right] \qquad (20)$$

إذ إن

$$\Psi\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x\right)\right]^{3/4}dx\ , \qquad \Psi^*\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f\left(x\right)\right]^{5/4}dx$$

3 – التوزيع الأمثل :

في حالة التوزيع الأمثل فإن تباين متوسط المعاينة الطبقية ، وعند استخدام نفس النموذج الخطي في الخطوات السابقة يأخذ الصيغة الآتية :

$$V_{OPt}\left(\bar{y}_{St}\right)=\frac{1}{n}\left[\sum_h W_h\left(\beta^2 S_{hx}^2+S_\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

وبالتعويض عن W_h , S_{hx}^2 نحصل على :

$$V_{OPt}\left(\bar{y}_{St}\right)=\frac{1}{n}\left[\sum_h \mu_h\left(x_h-x_{h-1}\right)\left(\beta^2\frac{\left(x_h-x_{h-1}\right)^2}{12}+S_\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

ولأن الدالة التجميعية $Cum\ f^{3/4}\ (x)$ للطبقات :

$$\Omega_h(x) = \int_{x_{h-1}}^{x_h} f^{\frac{3}{4}}(x)dx \qquad , \qquad h = 1, 2, ..., L-1$$

فإن قيمة متوسط المجتمع الطبقي تكون :

$$\mu_h = \frac{\Omega_h^{4/3}(x)}{(x_h - x_{h-1})^{3/4}}$$

ونتيجة استقلالية اختيار حدود الطبقات ، أي أن $\Omega_h(x) = \Omega(x)/L$. وعليه فإن التباين يصبح

$$V_{OPt}\left(\bar{y}_{St}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{\beta^2 \Omega^{\frac{8}{3}}(x)}{12 L^2} + \frac{\Omega^{\frac{8}{3}}(x)}{n} S_\varepsilon^2\right]$$

من النموذج الخطي (2) نعوض عن S_ε^2 , β^2 بما تساويها ، وعلى هذا الأساس يصبح تباين متوسط المعاينة الطبقية على الصورة الآتية :

$$V_{OPt}\left(\bar{y}_{St}\right) = \frac{S_y^2}{n}\left[\frac{\Omega^{\frac{8}{3}}(x)\rho^2}{12 L^2 S_\varepsilon^2} + \Omega^{\frac{8}{3}}(x)(1-\rho^2)\right] \qquad (21)$$

- دراسة تأثير الطبقية باستخدام النموذج الخطي الثنائي

دُرِسَت مسألة الطبقية المثلى لحالة وجود أكثر من متغير مساعد يرتبط بمتغير الدراسة من قبل عدد من الباحثين ، فدرسها (Thompson, 1977) بالاعتماد على طريقة $Cum\ f^{1/2}$ ودرسها (FRONTiE , 1982) معتمداً على طريقة $Cum\ f^{1/3}$ ، وواجدا صيغ تقريبية لتباين متوسط الطبقية . وفي هذا المبحث نقوم بإعطاء طريقتين مقترحتين ومقارنتها مع الطرائق التي سبق دراستها بهدف تقليل قيمة تباين المعاينة . وبافتراض أن المتغيرين X , Z ينتميان إلى توزيع ثنائي بدالة كثافة احتمالية مشتركة $f(x, z)$ ودوال كثافة هامشية $f(x)$ ، $f(z)$ على التوالي . وأن العلاقة بين متغير الدراسة Y والمتغيرين Z ، X علاقة خطية متمثلة بالصيغة الآتية :

$$Y_{ijk} = C + \alpha X_{ijh} + \beta Z_{ijh} + \varepsilon_{ijk} \qquad (22)$$

وهكذا نجد أنه يتم تقسيم المجتمع إلى k L طبقة بحيث تكون k من الطبقات للمتغير X و L من الطبقات للمتغير Z .

إن أي عنصر في المجتمع ينتمي إلى الطبقة (i , j) إذا كانت قيمة x فيه تنتمي إلى الطبقة i من خلال المتغير X وكانت قيمة z فيه تنتمي إلى الطبقة j من خلال المتغير Z . ويقسم حجم العينة n إلى $n_h = n / k L$ من المشاهدات في كل خليه وبافتراض أن N_{ij} عدد الوحدات في الطبقة (i , j) وأن قيم المتغير Y فيها y_{ijh} حيث $(h = 1 , 2 , ... , N_{ij})$ على فإن متوسط هذه القيم يحسب بالصيغة الآتية :

$$\mu_y = \frac{1}{N_{ij}} \sum_{h=1}^{N_{ij}} y_{ijh}$$

وبتباين قدره :

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N_{ij}} \sum_{h=1}^{N_{ij}} \left(y_{ijh} - \mu_{ij}\right)^2$$

وعلى افتراض أن $N_{ij} > n^*$ لكل قيم j ، i فإن المتوسط العام للمجتمع هو

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_i \sum_j \sum_h y_{ijh}$$

إذ إن $N = \sum_i \sum_j N_{ij}$. ويكون متوسط العينة في الطبقة (ij)هو $\bar{y}_{ij} = \frac{1}{n^*} \sum_h y_{ijh}$ ومن ثَمَّ فإن متوسط المعاينة الطبقية في هذه الحالة هو

$$\bar{y}_{st} = \sum_{i \cdot j} \frac{N_{ij}}{N} \bar{y}_{ijh}$$

وهو تقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع .

– الصيغة التقريبية لتباين متوسط المعاينة الطبقية حسب طريقة $Cum\ f^{2/3}$

بافتراض أن المتغيرين العشوائيين Z ، X لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة $f(x, z)$ ودوال كثافة هامشية $f(z)$ ، $f(x)$ على التوالي ، ونفرض أن :

$$\phi(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^{2/3} dx \qquad , \quad \phi(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(z)]^{2/3} dz$$

$$M(X, Z) = \left\{ \phi^3(X)\phi(Z) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x,z) f^{-2}(x) f^{-\frac{2}{3}}(z) dx\, dz \right\} \Big/ 12\sigma^2(x)$$

$$N(X, Z) = \phi(X)\phi(Z) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x,z) f^{-\frac{2}{3}}(x) f^{-\frac{2}{3}}(z) dx\, dz$$

ولإيجاد التباين التقريبي لمتوسط الطبقية سوف يتم التركيز على المربع المحدد $[a, b] \times [c, d]$ الذي تكون f (x, z) خارجه صفراً .

نفرض أن x_1 ، x_2 ، …… ، x_{k-1} و z_1 ، z_2 ، …… ، z_{L-1} تمثل الحدود الطبقية التي تعرف k من الطبقات للمتغير X و L من الطبقات للمتغير Z حيث أن $z_i = d , z_0 = c , x_k = b , x_0 = a$ وأن :

$$\phi_i(X) = \int_{X_{i-1}}^{X_i} [f(x)]^{2/3} dx \qquad , \quad \phi_j(Z) = \int_{Z_{j-1}}^{Z_j} [f(z)]^{2/3} dz$$

$$W_i(X) = \int_{X_{i-1}}^{X_i} f(x) dx \qquad , \quad W_j(Z) = \int_{Z_{j-1}}^{Z_j} f(z) dz$$

$$W_{ij}(X, Z) = \int_{X_{i-1}}^{X_i} \int_{Z_{j-1}}^{Z_j} f(x, z)\, dx\, dz$$

$$\sigma_i^2(X) = \int_{X_{i-1}}^{X_i} x^2 \frac{f(x)}{W_i(X)} dx - \left\{ \int_{X_{i-1}}^{X_i} x \frac{f(x)}{W_i(X)} dx \right\}^2$$

$$\sigma_j^2(Z) = \int_{Z_{j-1}}^{Z_j} z^2 \frac{f(z)}{W_i(Z)} dz - \left\{ \int_{Z_{j-1}}^{Z_j} z \frac{f(z)}{W_i(Z)} dz \right\}^2$$

قام (Thompson , 1977) بتقريب الدالة $f(x, z)$ بكمية ثابتة داخل كل طبقة وجعلها مساوية للمعدل μ_{ij} فتم الحصول على : $W_{ij} = \mu_{ij}(x_i - x_{i-1})(z_j - z_{j-1})$ وبنفس الطريقة يمكن الحصول على :

$$\sigma_i^2(X) = (x_i - x_{i-1})^2 / 12 \qquad , \ \sigma_i^2(Z) = (Z_j - Z_{j-1})^2 / 12$$

$$\phi_i(X) = \mu_i^{\frac{2}{3}}(x)(x_i - x_{i-1}) \qquad , \phi_j(Z) = \mu_j^{\frac{2}{3}}(z)(z_j - z_{j-1})$$

إذ إن $\mu_i(x)$, $\mu_i(z)$ هي قيم ثابتة لدوال الكثافة الاحتمالية الهامشية لدالة الطبقة (i, j) طبقاً لـ Z ، X على التوالي . وعليه فإن تباين متوسط المعاينة الطبقية سوف يكون:

$$V(\bar{y}_{St}) = \frac{k_L}{n} \sum_i \sum_j W_i^2 \sigma_{ij}^2 (Y)$$

$$= \frac{k_L}{n} \sum_i \sum_j W_i^2 \left[\alpha^2 \sigma_{ij}^2(x) + \beta^2 \sigma_{ij}^2(z) + \sigma_{ij}^2(\varepsilon) + 2\alpha\beta \operatorname{Cov}_{ij}(x,z)\right]$$

وبافتراض أن

$$\operatorname{Cov}_{ij}(x,z) = 0, \sigma_{ij}^2(x) = \sigma_i^2(x), \sigma_{ij}^2(z) = \sigma_j^2(z), \sigma_{ij}^2(\varepsilon) = \sigma^2(\varepsilon)$$

لجميع قيم i و j لذا فإن :

$$V(\bar{y}_{St}) = \frac{k_l}{n}\left[\alpha^2 \sum_{i \cdot j} W_{ij}^2 \sigma_i^2(x) + \beta^2 \sum_{i \cdot j} W_{ij}^2 \sigma_j^2(z) \sum_{i \cdot j} W_{ij}^2\right] \qquad (23)$$

وباستخدام التقريبات الواردة في أعلاه نجد أن :

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i \cdot j} W_{ij}^2 \sigma_i^2(x) &= \mu_{ij}^2 (x_i - x_{i-1})^4 (x_j - x_{j-1})^2 / 12 \\ &= \mu_{ij}^2 \mu_i^{-2}(x) \mu_j^{\frac{-2}{3}} = (x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1}) \phi_i^3(x) \phi_j(z) / 12 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

ولأن بناء الطبقات على المتغيرين Z ، X قائم على الافتراض التوزيع المتساوي فإن $\phi_i(x) = \dfrac{\phi(x)}{k}$, $\phi_j(z) = \dfrac{\phi(z)}{L}$ ، فإنه بتعويض هذه القيم في (24) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i \cdot j} W_{ij}^2 \sigma_i^2(x) &= \frac{\phi^3(X)\phi(Z)}{12 k^3 l} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} f^2(x,z) f^{-2}(x) f^{-\frac{2}{3}}(z)\, dx\, dz \\ &= M(X,Z)\sigma^2(x) / k^3 L \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

وبالطريقة نفسها ومن التماثل نحصل على :

$$\sum_{i \cdot j} W_{ij}^2 \sigma_j^2(z) = M(Z,X)\sigma^2(z) / k\, l^3 \qquad (26)$$

وباستخدام التقريبات أيضاً نجد أن :

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i \cdot j} W_{ij}^2 &= \sum_{i \cdot j} \mu_{ij}^2 (x_i - x_{i-1})^2 (z_j - z_{j-1})^2 \\ &= \sum_{i \cdot j} \mu_{ij}^2 \mu_i^{-\frac{2}{3}}(x) \mu_i^{-\frac{2}{3}}(z) (x_i - x_{i-1})(z_j - z_{j-1}) \phi_i(x) \phi_j(z) \\ &= \frac{\phi(X)\phi(Z)}{k L} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z) f^{-\frac{2}{3}}(x) f^{-\frac{2}{3}}(z)\, dx\, dz \\ &= N(X,Z) / k L \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

وبتعويض المعادلات (25.) - - (27.) في العلاقة (23.) نحصل على :

$$V\left(\bar{y}_{St}\right)=\frac{kL}{n}\left[\alpha^{2}\frac{M(X,Z)\sigma^{2}(x)}{k^{3}L}+\beta^{2}\frac{M(Z,X)\sigma^{2}(z)}{kL^{3}}+\frac{N(X,Z)\sigma^{2}(\varepsilon)}{kL}\right] \quad (28)$$

وعلى فرض أن r_{xz} هو معامل الارتباط بين Z ، X نحصل على :

$$\alpha=\frac{\left(r_{xy}-r_{xy}r_{xz}\right)\sigma(y)}{\sqrt{\left(1-r_{xz}\right)\sigma(x)}}\ ,\beta=\frac{\left(r_{xy}-r_{xy}r_{xz}\right)\sigma(y)}{\sqrt{\left(1-r_{xz}\right)\sigma(x)}},\sigma^{2}(\varepsilon)=\left(1-R^{2}_{y\cdot xz}\right)\sigma(y)$$

إذ إن $R^{2}_{y\cdot xz}$ هو معامل الارتباط المتعدد . وبالتعويض في العلاقة (28) نجد أن تباين متوسط المعاينة الطبقية :

$$V\left(\bar{y}_{St}\right)=\frac{\sigma^{2}(x)}{n}\left[M(X,Z)\frac{\left(r_{xy}-r_{zy}r_{xz}\right)^{2}}{\left(1-r^{2}_{xz}\right)k^{2}}+M(Z,X)\frac{\left(r_{zy}-r_{xy}r_{xz}\right)^{2}}{\left(1-r^{2}_{xz}\right)L^{2}}+N(X,Z)\left(1-R^{2}_{y\cdot xz}\right)\right] \quad (29)$$

وعندما تكون قيم L ، K كبيرة نحصل على :

$$\frac{V\left(\bar{y}_{St}\right)}{V\left(\bar{y}\right)}=N(X,Z)\left(1-R^{2}_{y\cdot xz}\right)$$

حيث أن $V\left(\bar{y}\right)$ هو تباين متوسط المعاينة العشوائية البسيطة .

- حالة استقلالية المتغيرات الطبقية :

سوف نقوم الآن بحساب التباين التقريبي $V\left(\bar{y}_{St}\right)$ عندما يكون Z ، X مستقلين عشوائياً ، أي إن $f(x,z)=f(x)$ $f(z)$ . . فعلى افتراض أن :

$$\begin{aligned}
&\phi^{*}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)^{4/3}\right]dx \qquad , \ \phi^{*}(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)^{4/3}\right]dz\\
&\phi_{X}=\phi^{6}(X)/12\sigma^{2}(x) \qquad , \ \phi^{*}_{X}=\phi(X)\phi^{*}(X)\\
&\phi_{Z}=\phi^{6}(Z)/12\sigma^{2}(z) \qquad , \ \phi^{*}_{Z}=\phi(Z)\phi^{*}(Z)
\end{aligned}$$

وبتعويض هذه القيم في العلاقة (29) نحصل على

$$V\left(\bar{y}_{St}\right)=\frac{\sigma^{2}(y)}{n}\left[\phi_{X}\phi^{*}_{Z}\frac{r^{2}_{xy}}{k^{2}}+\phi^{*}_{X}\phi\frac{r^{2}_{xy}}{L^{2}}+\phi^{*}_{X}\phi^{*}_{Z}\left(1-R^{2}_{y\cdot xz}\right)\right] \qquad (30)$$

وعندما تكون قيم L ، k كبيرة فإن العلاقة أعلاه تأخذ الشكل الآتي

$$V\left(\bar{y}_{St}\right)=\frac{\sigma^{2}(y)}{n}\left[\phi^{*}_{X}\phi^{*}_{Z}\left(1-R^{2}_{y\cdot xz}\right)\right]$$

ومن ثَمَّ فإن نسبة التباين لمتوسط المعاينة الطبقة إلى تباين متوسط المعاينة العشوائية البسيطة تكون :

$$\frac{V\left(\bar{y}_{St}\right)}{V\left(\bar{y}\right)}=\phi^{*}_{X}\phi^{*}_{Z}\left(1-R^{2}_{y\cdot xz}\right)$$

• <u>حسب طريقة $Cum\ f^{3/4}$ المقترحة :</u>

إن الصيغة التقريبية لإيجاد تباين متوسط المعاينة الطبقية بالاعتماد على $Cum\ f^{3/4}$ يمكن الحصول عليه من العلاقة (29 على أن يكون :)

$$\phi(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)^{3/4}\right]dx \quad , \quad \phi(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(z)^{3/4}\right]dz$$

$$M(X,Z)=\left\{g^{3}(X)\,g(Z)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^{2}(x,z)\,f^{-\frac{9}{4}}(x)\,f^{-\frac{3}{4}}(z)\,dx\,dz\right\}\Big/ 12\sigma^{2}(x)$$

$$M(X,Z)=g(X)\,g(Z)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^{2}(x,z)\,f^{-\frac{3}{4}}(x)\,f^{-\frac{3}{4}}(z)\,dx\,dz$$

أما في حالة استقلال المتغيرين Z , X فإن التباين نحصل عليه من العلاقة (30) على أن يكون :

$$g^{*}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x)^{\frac{5}{4}}\right]dx \quad , \quad g^{*}(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(z)^{\frac{5}{4}}\right]dz$$

$$g_{X}=g^{\frac{8}{3}}(X)\Big/12\sigma^{2}(x) \quad , \quad g_{X}^{*}=g(X)\,g^{*}(X)$$

$$g_{Z}=g^{\frac{8}{3}}(Z)\Big/12\sigma^{2}(z) \quad , \quad g_{Z}^{*}=g(Z)\,g^{*}(Z)$$

• الدراسة التجريبية :

بناء نماذج المحاكاة وتحليل النتائج :

لقد صيغت نماذج المحاكاة في هذه الدراسة لتحاكي تجريبية يمكن وجودها في الواقع العملي على النحو التالي :

التجربة الأولى :

تُجرى سلسلة من التجارب بتوليد بيانات تتبع التوزيع الطبيعي Normal Distribution

وقد استخدم هذا التوزيع لإجراء المقارنة بين الطريقة المقترحة $Cum\ f^{3/4}$ والطرائق التقريبية الأخرى ($Cum\ f^{1/2}$, $Cum\ f^{1/3}$, $Cum\ f^{2/3}$) ولإيجاد التباين التقريبي لمتوسط المعاينة الطبقية عند وجود متغير مساعد X يرتبط بمتغير الدراسة Y ، بافتراض عدد من معاملات الارتباط (0.85 , 0.90 , 0.95 , 0.99) وعند حجوم عينات كلية (n = 100 , n = 200) . واستُخدمت ثلاثة أساليب للحصص هي التوزيع المتساوي والتوزيع المتناسب والتوزيع الأمثل ولـ 7 طبقات . وبهدف الوقوف على كفاءة الطرائق المدروسة وذلك باستخدام كلٍ من تباين المعاينة الطبقية والكفاءة النسبية $V(\bar{y}_{St})/V(\bar{y})$ مقياسين للحكم على جودة هذه الطرائق . ومن أجل تحقيق الهدف أعلاه واعتماداً على مبدأ Monte Carlo في تكرار المشاهدات المولدة فقد نُفِّذ (1000) تكرار لكل تجربة من التجارب المفترضة . وكُتِب برنامج المحاكاة بلغة فيجول بيسك (Visual Basic) (عودة ومنصور 1991) ويمكن إيجاد خطوات بناء نموذج المحاكاة كالآتي :

• توليد الأرقام العشوائية باستخدام الدالة المكتبية للحصول على سلسلة من الأعداد التي يجب أن تكون احتمالية ظهور أي منها متساوية ، وتتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (0 , 1) وتكون مستقلة إحصائياً .

• توليد متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ بطريقة Box - Muller وفق إحدى الصيغتين الآتيتين :

$$X_1 = \left(-2\log u_1\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(2\pi u_2\right) \qquad ....(1)$$

$$X_2 = \left(-2\log u_1\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(2\pi u_2\right) \qquad ....(2)$$

ويمثل كل من u_1 , u_2 متغيرين عشوائيين مستقلين ذوَي توزيع منتظم $U(0,1)$. وعليه فإن المتغيرين X_1 , X_2 مستقلان ولكل منهما توزيع طبيعي معياري .

• إيجاد التباين التقريبي لمتوسط المعاينة الطبقية $V_{Eq}\left(\bar{y}_{St}\right), V_{Pr\,OP}\left(\bar{y}_{St}\right), V_{OPt}\left(\bar{y}_{St}\right)$ للطرائق التقريبية الأربع قيد الدراسة .

• تكرار التجربة 1000 مرة لكل حالة من حالات التباين في الفقرة أعلاه .

• إيجاد الكفاءة النسبية لتباين متوسط المعاينة الطبقية بالنسبة إلى تباين متوسط المعاينة العشوائية البسيطة $V\left(\bar{y}_{St}\right) / V\left(\bar{y}\right)$ لكل حالة من حالات التباين .

<u>نتائج محاكاة التجربة الأولى :</u>

بوّبت النتائج التي حُصِل عليها والتي تمثل تباين متوسط المعاينة الطبقية للطرائق التقريبية الأربع باستخدام التوزيع الطبيعي المشار إليها أعلاه وفق حصص التوزيعات : الأمثل والمتناسب والمتساوي في الجداول (من 1 إلى 3) . وتشير النتائج إلى أفضلية الطريقة المقترحة على الطرائق الأخرى . وتبين ذلك بالمقارنة : أن تباين متوسط المعاينة الطبقية اعتماداً على طريقة $Cum\ f^{3/4}$ أقل من تباين طريقة $Cum\ f^{2/3}$ ثم يليها طريقة $Cum\ f^{1/2}$ ، في حين تعطي طريقة $Cum\ f^{1/3}$ أكبر تباين . أما إذا ما تم إلقاء نظرة أكثر شمولية على الجداول ، فإننا نلاحظ أن تباين متوسط المعاينة الطبقية للتوزيع الأمثل أقل من تباين متوسط المعاينة للتوزيع المتناسب ، وهذه الأخيرة أقل من تباين المتوسط للتوزيع المتساوي .

وتشير النتائج أيضاً إلى أن التباين يزداد كلما انخفض معامل الارتباط ρ . وهذه النتيجة

تؤكد مدى ضرورة العلاقة الوثيقة بين متغير الدراسة Y ومتغير الطبقية X . في حين أن التباين ينخفض بزيادة عدد الطبقات وحجم العينة .

بعد مناقشة نتائج التباين ، فإنه بالإمكان حساب الكفاءة النسبية للتباين التقريبي لمتوسط المعاينة الطبقية بالنسبة لتباين المعاينة العشوائية البسيطة ، على الرغم من إعطاء صورة واضحة عن طبيعة تقدير تباين متوسط المعاينة الطبقية من خلال الجداول السابقة ، إلاّ إنه من الضروري أن نستعرض نتائج حسابات الكفاءة لأنها تعبر عن طبيعة سلوك التقدير بشكل أوضح ، وتحدد مدى أفضلية التقدير المفترض بالقياس إلى أي تقدير آخر من خلال مدى اقتراب معاملات الكفاءة عن الواحد أو ابتعادها . ويبين الجدول (4) أن الطريقة المقترحة تحقق أعلى كفاءة نسبية إذا ما قورنت بالطرائق الأخرى ، تليها طريقة $Cum\ f^{2/3}$ ، في حين أن الطريقة $Cum\ f^{1/3}$ تعطي أقل كفاءة . وبصورة عامة فإن معاملات الكفاءة المحسوبة لجميع الحالات التي أُخِذت بنظر الاعتبار معظمها أقل من الواحد الصحيح ، وهذا يعد مؤشراً على أن المعاينة الطبقية أفضل من المعاينة العشوائية البسيطة . وإن هذه المعاملات تتناقص بزيادة عدد الطبقات ، ولا تتأثر بحجم العينة . ونلاحظ أن هناك تأثيراً واضحاً لمعاملات الارتباط على الكفاءة فتزيد وتقل بزيادة وانخفاض درجة الارتباط على التوالي . من ناحية أخرى نجد أن الكفاءة النسبية للتوزيع الأمثل كانت أعلى من كفاءة التوزيع المتناسب في حين أعطى التوزيع المتساوي كفاءة أقل والأشكال (من 1 إلى 6) توضح ذلك

التجربة الثانية :

لدراسة مسألة الطبقية لحالة وجود أكثر من متغير واحد للطبقية . تمت في هذه التجربة مقارنة طريقتين تقريبيتين مقترحتين ($Cum\ f^{3/4}$, $Cum\ f^{2/3}$) بالنسبة لطريقتين سبق دراستها ($Cum\ f^{1/2}$, $Cum\ f^{1/3}$) لإيجاد تباين متوسط الطبقية عندما يكون متغير الدراسة Y مرتبطاً ارتباطاً خطياً مع متغيري الطبقية Z , X . فقد صيغ نموذج المحاكاة في هذه التجربة ليحاكي عددا كبيراً من الحالات التي تعتمد على التوزيع الطبيعي . ففي الحالة الأولى نجد أن كلاً من المتغيرين Z , X لهما التوزيع نفسه ، على أن كلا المتغيرين مستقلان عشوائياً . في حين أن الحالة الثانية درست خاصية متغيرات الطبقية الموزعة توزيعاً طبيعياً ثنائي المتغيرات . بارتباط قدرة ρ . فتم توليد متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي الثنائي المعياري بأوساط 0 وتباينات قدرها 1 ومعامل ارتباط ρ على وفق الصيغة الآتية

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{W_1} &= \rho\,\mathbf{X_1} + \left(\mathbf{1} - \rho^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{X_2} \\ \mathbf{W_2} &= \mathbf{X_1} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

وإن X_2 , X_1 كما هي معرفة في الصيغتين السابقتين (.1) , (.2) . ومن ثَّم فإن W_2 , W_1 لهما توزيع طبيعي ثنائي معياري ، وولدت البيانات بافتراض قيم عدة لـ ρ .

وفي الحالتين أعلاه كررت كل تجربة 1000 مرة وعند حجوم عينات كلية 75 ‘ 150 ‘ 200 وزعت على 7 طبقات . وقيست الكفاءة النسبية لتباين المعاينة الطبقية بالنسبة لتباين المعاينة العشوائية البسيطة .

<u>نتائج محاكاة التجربة الثانية :</u>

لغرض المقارنة بين الطرائق التقريبية الأربع فقد أظهرت النتائج أن تباينات المعاينة الطبقية والكفاءة النسبية لطريقة $Cum\ f^{3/4}$ أفضل مما هو عليه في بقية الطرائق لحالتي كون متغيري الطبقية مستقلين أو مرتبطين ، ثم تليها طريقة $Cum\ f^{2/3}$ ، ومن ثم طريقة $Cum\ f^{1/2}$ ، وتأتي في المرتبة الأخيرة طريقة $Cum\ f^{1/3}$ حيث أعطت تباين أعلى وكفاءة نسبية أقل ، في حالة انتماء متغيري الطبقية إلى التوزيع الطبيعي المنفرد أو التوزيع الطبيعي الثنائي .

وتبين الجداول (من 5 إلى 9) أن التباينات الطبقية والكفاءة النسبية لتباين متوسط المعاينة الطبقية إلى تباين متوسط المعاينة العشوائية البسيطة عند متغيري الطبقية Z , X مستقلان ولهما التوزيع الاحتمالي نفسه .

في حين أن الجداول من (10 إلى 17) تمثل التباينات الطبقية والكفاءة النسبية عندما يكون متغيرا الطبقية مرتبطين ولهما توزيع طبيعي ثنائي ولقيم عدة لمعامل الارتباط (0.2 , 0.5 , 0.9) = ρ وتشير النتائج في هذه الحالة إلى اختزال تباين متوسط المعاينة الطبقية بالمقارنة مع حالة الاستقلالية ، ومن ثَّم فإن الكفاءة النسبية كما هي موضحة في الجداول أعلاه عالية أكثر مما هي عليه في حالة استقلالية المتغيرات كما في الجدول (.9) .

الاستنتاجات والتوصيات :

– بناءً على النتائج المتعلقة بتطبيق الطرائق التقريبية باستخدام أسلوب المحاكاة واعتماداً على كل من تباين متوسط المعاينة الطبقية والكفاءة النسبية كمقياسين للحكم على كفاءة هذه الطرق يمكننا الإشارة إلى

1– أظهرت الدراسة التجريبية أن الطريقة $Cum\ f^{3/4}$ لتقدير متوسط المعاينة الطبقية باستخدام متغير مساعد تحقق تباين أقل بالمقارنة مع الطرق الأخرى . وإن التباين يصغر بزيادة عدد الطبقات .

2– الكفاءة النسبية لتباين متوسط المعاينة الطبقية إلى تباين متوسط المعاينة العشوائية البسيطة باستخدام المتغير المساعد تزداد بزيادة عدد الطبقات ولا تتأثر بحجم العينة .

3- أظهرت الدراسة أن الطريقة لتقدير تباين متوسط المعاينة الطبقية باستخدام متغيرين مساعدين للطبقة أعطت نتائج أفضل وهذا ما أكده مؤشر التباين والكفاءة النسبية .

4- في حالة إخضاع متغيري الطبقية للتوزيع الطبيعي الثنائي بارتباط قدرة ρ أظهرت نتائج الكفاءة النسبية اختزال تباين متوسط المعاينة الطبقية بالمقارنة مع حالة استقلالية المتغيرين .

5- أخيراً يتوقف التوزيع الأمثل لحجم العينة الطبقية على حجم الطبقات وتباينات المتغيرات وهذا يتناسب طرداً مع حجم الطبقة أو تبايناتها . لأن دقة التقدير تزداد كلما زاد عدد الطبقات ولكن إلى الحد الذي يلاحظ فيه عدم تحسن أو زيادة في دقة التقدير فيكون عدد الطبقات عند هذا الحد أفضل ما يمكن .

6- تعتبر هذه الدراسة أساساً لإمكانية الوصول إلى أسلوب يحوي عدة متغيرات في آن واحد ، بهدف اختصار هذه المتغيرات إلى أقل عدد ممكن ، وصولاً إلى حساب التوزيع الأمثل لكل متغير على حدة لرؤية مدى عدم التوافق بينها .

جدول 1 : تباين متوسط المعاينة الطبقية للطرائق التقريبية على وفق التوزيع الأمثل

Correlation ρ	Methods	n = 100						n = 200					
		Strata						Strata					
		2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
0.99	Cum f 1/2	0.0946	0.0475	0.0311	0.0235	0.0193	0.0168	0.0475	0.0239	0.0156	0.0118	0.0097	0.0085
	Cum f 1/3	0.5756	0.2613	0.1513	0.1003	0.0727	0.056	0.2821	0.1282	0.0743	0.0493	0.0358	0.0276
	Cum f 2/3	0.0463	0.026	0.019	0.0157	0.0139	0.0129	0.0231	0.013	0.0095	0.0079	0.007	0.0065
	Cum f 3/4	0.0377	0.0223	0.0169	0.0144	0.013	0.0122	0.0188	0.0111	0.0084	0.0072	0.0065	0.0061
0.95	Cum f 1/2	0.1318	0.0639	0.0404	0.0295	0.0236	0.0201	0.0625	0.0306	0.0194	0.0142	0.0114	0.0097
	Cum f 1/3	0.8666	0.3909	0.2244	0.1474	0.1055	0.0803	0.4144	0.1869	0.1072	0.0704	0.0503	0.0383
	Cum f 2/3	0.0576	0.031	0.216	0.0173	0.015	0.0136	0.029	0.0157	0.0114	0.0088	0.0077	0.007
	Cum f 3/4	0.0463	0.0258	0.0187	0.0154	0.0136	0.0125	0.024	0.0135	0.0098	0.0081	0.0072	0.0065
0.90	Cum f 1/2	0.1595	0.0764	0.0473	0.0338	0.0265	0.0221	0.0803	0.0384	0.0238	0.017	0.0133	0.0111
	Cum f 1/3	1.0324	0.4643	0.2655	0.1735	0.1235	0.0933	0.5001	0.225	0.1288	0.0842	0.06	0.0454
	Cum f 2/3	0.074	0.0383	0.0259	0.0201	0.017	0.0151	0.0371	0.0193	0.0137	0.0101	0.0085	0.0076
	Cum f 3/4	0.0591	0.0317	0.0221	0.0177	0.0153	0.0138	0.0296	0.0159	0.0111	0.0089	0.0077	0.007
0.85	Cum f 1/2	0.2028	0.0957	0.0582	0.0408	0.0314	0.0257	0.1046	0.0492	0.0299	0.0209	0.016	0.0131
	Cum f 1/3	1.2598	0.5654	0.3224	0.2099	0.1488	0.1119	0.6566	0.2947	0.1681	0.1094	0.0776	0.0584
	Cum f 2/3	0.0926	0.0467	0.0307	0.0232	0.0192	0.0168	0.0496	0.025	0.0164	0.0124	0.0103	0.0089
	Cum f 3/4	0.0738	0.0383	0.0258	0.0201	0.0169	0.0151	0.0386	0.0262	0.0135	0.0105	0.0088	0.0079

جدول 2 : تباين متوسط المعاينة الطبقية للطرائق التقريبية وفق التوزيع المناسب

Correlation ρ	Methods	n = 100						n = 200					
		Strata						Strata					
		2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
0.99	Cum f 1⁄2	0.4448	0.2041	0.1198	0.0808	0.0596	0.0468	0.2224	0.1021	0.0599	0.0404	0.0298	0.0234
	Cum f 1⁄3	0.5751	0.2608	0.1508	0.0998	0.0722	0.0555	0.2819	0.1279	0.074	0.0491	0.0355	0.0274
	Cum f 2⁄3	0.0882	0.045	0.0299	0.023	0.0192	0.0169	0.0442	0.0226	0.015	0.0115	0.0095	0.0085
	Cum f 3⁄4	0.056	0.0306	0.0217	0.0176	0.0153	0.014	0.0279	0.0152	0.0108	0.0088	0.0075	0.007
0.95	Cum f 1⁄2	0.5567	0.2984	0.173	0.115	0.0834	0.0644	0.2954	0.1345	0.0782	0.0522	0.038	0.0295
	Cum f 1⁄3	0.8661	0.3904	0.2239	0.1468	0.105	0.0797	0.4142	0.1866	0.107	0.0701	0.0501	0.038
	Cum f 2⁄3	0.1112	0.0551	0.0355	0.0264	0.0215	0.0185	0.0554	0.0276	0.0178	0.0133	0.0109	0.0094
	Cum f 3⁄4	0.0695	0.0363	0.0247	0.0193	0.0164	0.0147	0.0366	0.0192	0.0131	0.0103	0.0087	0.0078
0.90	Cum f 1⁄2	0.7725	0.3497	0.2017	0.1332	0.096	0.0735	0.3873	0.1753	0.1011	0.0668	0.0481	0.0367
	Cum f 1⁄3	1.0319	0.4638	0.265	0.173	0.123	0.0928	0.4998	0.2248	0.1285	0.084	0.0597	0.0452
	Cum f 2⁄3	0.1482	0.0717	0.0449	0.0325	0.0257	0.0217	0.0743	0.036	0.0225	0.0163	0.013	0.0103
	Cum f 3⁄4	0.0911	0.0461	0.0304	0.0231	0.0191	0.0168	0.0457	0.0232	0.0153	0.0116	0.0095	0.0085
0.85	Cum f 1⁄2	0.9831	0.4433	0.2544	0.167	0.1195	0.0908	0.4967	0.224	0.1285	0.0843	0.0603	0.0453
	Cum f 1⁄3	1.2593	0.5649	0.3218	0.2094	0.1482	0.1114	0.5563	0.2944	0.1678	0.1092	0.0773	0.0581
	Cum f 2⁄3	0.1859	0.0885	0.0544	0.0387	0.0301	0.0249	0.1015	0.0483	0.0296	0.021	0.0163	0.0135
	Cum f 3⁄4	0.1151	0.0568	0.0364	0.0269	0.0218	0.0187	0.06	0.0295	0.019	0.014	0.0114	0.0051

جدول 3 : تباين متوسط المعاينة الطبقية للطرائق التقريبية وفق التوزيع المتساوي

Correlation ρ	Methods	n = 100						n = 200					
		Strata						Strata					
		2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
0.99	Cum f 1⁄2	0.6887	0.4479	0.3636	0.3246	0.3034	0.2907	0.3447	0.2243	0.1822	0.1627	0.1521	0.1457
	Cum f 1⁄3	0.8942	0.5798	0.4698	0.4189	0.3912	0.3746	0.4411	0.2872	0.2333	0.2083	0.1948	0.1866
	Cum f 2⁄3	0.2912	0.2481	0.233	0.226	0.2222	0.2199	0.1459	0.1242	0.1167	0.1132	0.1113	0.1101
	Cum f 3⁄4	0.1201	0.078	0.0633	0.0565	0.0528	0.0506	0.0595	0.0387	0.0314	0.028	0.0262	0.025
0.95	Cum f 1⁄2	0.9229	0.5646	0.4392	0.3811	0.3496	0.3306	0.4183	0.2574	0.2011	0.175	0.1609	0.1523
	Cum f 1⁄3	1.2425	0.7668	0.6003	0.5232	0.4813	0.4561	0.5834	0.3558	0.2762	0.2393	0.2193	0.2072
	Cum f 2⁄3	0.2941	0.238	0.2184	0.2093	0.2044	0.2014	0.1445	0.1167	0.107	0.1025	0.1004	0.0985
	Cum f 3⁄4	0.1373	0.0834	0.0645	0.0558	0.051	0.0482	0.0752	0.0462	0.0361	0.0314	0.0289	0.0274
0.90	Cum f 1⁄2	1.0115	0.5887	0.4407	0.3722	0.335	0.3126	0.5076	0.2956	0.2214	0.1871	0.1684	0.1572
	Cum f 1⁄3	1.3584	0.7903	0.5915	0.4995	0.4495	0.4193	0.6601	0.385	0.2888	0.2442	0.22	0.2054
	Cum f 2⁄3	0.3497	0.2732	0.2464	0.234	0.2273	0.2232	0.1758	0.1374	0.124	0.1177	0.1144	0.1123
	Cum f 3⁄4	0.1772	0.1031	0.0771	0.0651	0.0586	0.0546	0.0891	0.052	0.0389	0.0329	0.0296	0.0277
0.85	Cum f 1⁄2	1.2201	0.6803	0.4914	0.4039	0.3564	0.3278	0.6094	0.3366	0.2412	0.197	0.173	0.1585
	Cum f 1⁄3	1.5655	0.8711	0.6281	0.5156	0.4545	0.4176	0.8197	0.4579	0.3312	0.2726	0.2407	0.2215
	Cum f 2⁄3	0.3804	0.283	0.249	0.2332	0.2246	0.2195	0.2138	0.1605	0.1419	0.1333	0.1286	0.1258
	Cum f 3⁄4	0.216	0.1201	0.0866	0.071	0.0626	0.0575	0.1122	0.0623	0.0449	0.0368	0.0324	0.0298

جدول4 : الكفاءة النسبية $v\left(\overline{y_n}\right)/\,v\left(\bar{y}\right)$ للطرائق التقريبية – لتوزيع Normal

methods	h	Optimal				Proportional				Equal			
		ρ = 0.85	ρ = 0.85	ρ = 0.85	ρ = 0.85	ρ = 0.85	ρ = 0.85	ρ = 0.85	ρ = 0.85	ρ = 0.85	ρ = 0.85	ρ = 0.85	ρ = 0.85
Cum f 1⁄2	2	0.2123	0.2568	0.2877	0.3199	0.3657	0.5878	0.7409	0.9583	0.3823	0.6225	0.7872	1.0219
	3	0.0994	0.1187	0.1325	0.1466	0.1683	0.2666	0.3346	0.431	0.185	0.3012	0.3809	0.4947
	4	0.0598	0.0704	0.0781	0.086	0.0992	0.1542	0.1924	0.2465	0.1159	0.1887	0.2387	0.3101
	5	0.0416	0.048	0.053	0.0579	0.0672	0.1021	0.1266	0.1611	0.0839	0.1367	0.1729	0.2247
	6	0.0316	0.0359	0.0393	0.0426	0.0499	0.0738	0.0908	0.1147	0.0665	0.1084	0.1373	0.1783
	7	0.0256	0.0282	0.0311	0.0334	0.0394	0.0568	0.0693	0.0867	0.0561	0.0913	0.1156	0.1504
Cum f 1⁄3	2	0.477	0.7575	0.943	1.2535	0.4765	0.7571	0.9426	1.2531	0.5035	0.8062	1.006	1.3401
	3	0.217	0.3413	0.4237	0.5615	0.2165	0.3408	0.4233	0.5611	0.2435	0.3899	0.4867	0.6481
	4	0.126	0.1956	0.242	0.3193	0.1255	0.1951	0.2415	0.3189	0.1525	0.2442	0.305	0.4059
	5	0.0839	0.1281	0.1578	0.2072	0.0834	0.1277	0.1574	0.2068	0.1104	0.1768	0.2209	0.2938
	6	0.061	0.0915	0.1121	0.1463	0.0605	0.0911	0.1117	0.1459	0.0875	0.1401	0.1752	0.2329
	7	0.0472	0.0694	0.0846	0.1096	0.0467	0.069	0.0841	0.1092	0.0737	0.118	0.1476	0.1962
Cum f 2⁄3	2	0.1584	0.1655	0.1744	0.1802	0.0991	0.2375	0.2641	0.2944	0.2131	0.2661	0.3018	0.3465
	3	0.0754	0.0782	0.0821	0.0845	0.0938	0.1104	0.1223	0.1355	0.1078	0.1391	0.16	0.1877
	4	0.0464	0.0476	0.0498	0.051	0.0569	0.066	0.0726	0.0799	0.0709	0.0946	0.1103	0.132
	5	0.0329	0.0334	0.0349	0.0355	0.0399	0.0454	0.0496	0.0542	0.0539	0.0741	0.0873	0.1063
	6	0.0256	0.0258	0.0267	0.0271	0.0306	0.0342	0.0372	0.0402	0.0446	0.0629	0.0749	0.0923
	7	0.0212	0.0195	0.0218	0.022	0.025	0.0275	0.0296	0.0317	0.039	0.0561	0.0673	0.0839
Cum f 3⁄4	2	0.1454	0.1458	0.1507	0.152	0.1668	0.1832	0.1959	0.2079	0.1961	0.2393	0.2657	0.2984
	3	0.0696	0.0694	0.0715	0.0719	0.0793	0.0862	0.0918	0.0969	0.0948	0.1157	0.1285	0.1443
	4	0.0435	0.0694	0.0438	0.0439	0.0486	0.0522	0.0553	0.0581	0.0593	0.0725	0.0805	0.0904
	5	0.0308	0.0426	0.031	0.0309	0.0344	0.0365	0.0385	0.0401	0.0429	0.0525	0.0582	0.0654
	6	0.0241	0.0303	0.024	0.0239	0.0267	0.0279	0.0293	0.0303	0.034	0.0416	0.0461	0.0519
	7	0.0201	0.0235	0.0198	0.0197	0.0221	0.0228	0.0238	0.045	0.0286	0.0351	0.0389	0.0437

جدول5 : التباين التقريبي لمتوسط المعاينة الطبقية لطريقة $Cum\sqrt{f}$ ($Cumf^{1/2}$)   X = Normal,   Z = Normal,

Stratification variance																		
	n = 75						*n = 150*						*n = 200*					
H	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	1.01597	0.90214	0.8623	0.84386	0.83384	0.8278	0.51067	0.45428	0.43454	0.4254	0.42044	0.41745	0.38332	0.34113	0.32636	0.31953	0.31581	0.31357
3	0.57485	0.46102	0.42118	0.40274	0.39272	0.38668	0.28818	0.23179	0.21205	0.20291	0.19795	0.19496	0.21623	0.17404	0.15927	0.15244	0.14872	0.14618
4	0.42046	0.30663	0.26679	0.24835	0.23833	0.23229	0.21031	0.15392	0.13418	0.12504	0.12008	0.11709	0.15775	0.11556	0.10079	0.09395	0.09024	0.038
5	0.349	0.23517	0.19533	0.17689	0.16687	0.16083	0.17427	0.11788	0.09814	0.0891	0.08404	0.08105	0.13068	0.08849	0.07372	0.06688	0.06317	0.06093
6	0.31018	0.19635	0.15651	0.13807	0.12805	0.12201	0.15469	0.0983	0.07856	0.06942	0.06446	0.06147	0.11598	0.07378	0.05902	0.05218	0.04847	0.01623
7	0.28677	0.17294	0.1331	0.11466	0.10164	0.0986	0.14289	0.08649	0.06675	0.05762	0.05265	0.04966	0.10711	0.06492	0.05015	0.04331	0.0396	0.03736

X = Normal, Z = Normal, Cumf $^{1/3}$ جدول6 : التباين التقريبي لمتوسط المعاينة الطبقية لطريقة

Stratification variance																		
	n = 75						*n = 150*						*n = 200*					
H	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	1.53073	1.35893	1.29879	1.27096	1.24672	1.24672	0.7694	0.68428	0.65448	0.64069	0.6332	0.62869	0.57751	0.51383	0.49154	0.48122	0.47562	0.47224
3	0.86493	0.69312	0.63299	0.60516	0.58092	0.58092	0.43359	0.34847	0.31867	0.30488	0.29739	0.29288	0.32531	0.26163	0.23934	0.22902	0.22342	0.22004
4	0.6119	0.46009	0.39996	0.37212	0.34789	0.34789	0.31605	0.23093	0.20114	0.18735	0.17986	0.17534	0.23704	0.17336	0.15107	0.14075	0.13515	0.13177
5	0.52404	0.35223	0.2921	0.26426	0.24003	0.24003	0.26165	0.17653	0.14674	0.13295	0.12546	0.12094	0.19619	0.1325	0.11022	0.0999	0.09429	0.09092
6	0.46545	0.29364	0.23351	0.20567	0.18144	0.18144	0.2321	0.14698	0.11719	0.1034	0.09591	0.09139	0.17399	0.11031	0.08802	0.07771	0.0721	0.06872
7	0.43012	0.25831	0.19818	0.17035	0.14611	0.14611	0.21428	0.12916	0.09937	0.08558	0.07809	0.07357	0.16061	0.09693	0.07464	0.06132	0.05872	0.05534

جدول7 : التباين التقريبي لمتوسط المعاينة الطبقية لطريقة Cumf $^{2/3}$,Z = Normal, X = Normal

Stratification variance																		
	n = 75						*n = 150*						*n = 200*					
H	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	0.79308	0.70436	0.67331	0.65894	0.65113	0.64643	0.35469	0.35469	0.33931	0.33219	0.32832	0.32599	0.29924	0.29924	0.25484	0.24952	0.24662	0.24488
3	0.44928	0.36057	0.32952	0.31514	0.30734	0.30263	0.18129	0.18129	0.16591	0.15879	0.15492	0.15259	0.16901	0.13613	0.12462	0.11929	0.1164	0.11465
4	0.32895	0.24024	0.20919	0.19482	0.18701	0.1823	0.1206	0.1206	0.10522	0.0981	0.09423	0.0919	0.12343	0.09055	0.07904	0.07274	0.07082	0.06907
5	0.27326	0.18454	0.15349	0.13912	0.13131	0.12661	0.09251	0.09251	0.07713	0.07001	0.06614	0.06381	0.10234	0.06945	0.05794	0.05262	0.04972	0.04798
6	0.24301	0.15429	0.12324	0.10887	0.10106	0.09635	0.07725	0.07725	0.06187	0.05475	0.05088	0.04855	0.09088	0.05799	0.04648	0.04116	0.03826	0.03652
7	0.22476	0.13605	0.105	0.09062	0.08282	0.07811	0.06805	0.06805	0.05267	0.04555	0.04168	0.03935	0.08397	0.05108	0.03957	0.03425	0.03135	0.02961

جدول8 : التباين التقريبي لمتوسط المعاينة الطبقية لطريقة Cumf 3/4   Z = Normal,   X = Normal,

Stratification variance																		
	n = 75						*n = 150*						*n = 200*					
H	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	0.54243	0.48212	0.46101	0.45124	0.44593	0.44273	0.27268	0.24279	0.23234	0.2275	0.22487	0.22328	0.2047	0.18234	0.17452	0.1709	0.16893	0.16774
3	0.3087	0.24839	0.22728	0.21751	0.2122	0.2093	0.15479	0.12491	0.11445	0.10961	0.10698	0.1054	0.11617	0.09381	0.08599	0.08236	0.0804	0.07921
4	0.2269	0.16659	0.14548	0.13571	0.1304	0.1272	0.11353	0.08365	0.07319	0.06835	0.06572	0.06414	0.08518	0.06282	0.055	0.05138	0.04941	0.04822
5	0.18904	0.12872	0.10762	0.09784	0.09254	0.08934	0.09444	0.06455	0.0541	0.04926	0.04663	0.04504	0.07084	0.04848	0.04066	0.03704	0.03507	0.03388
6	0.16847	0.10816	0.08705	0.07728	0.07197	0.06877	0.08406	0.05418	0.04372	0.03888	0.03625	0.03467	0.06305	0.04069	0.03287	0.02925	0.02728	0.02609
7	0.15607	0.09575	0.07465	0.06487	0.05957	0.05637	0.07781	0.04793	0.03747	0.03263	0.03048	0.02841	0.05835	0.03599	0.02817	0.02455	0.02258	0.02139

جدول 9 : الكفاءة النسبية $V(\bar{y}_{st})/V(\bar{y})$ للطرائق التقريبية عند Z = Normal , X = Normal

Stratification																								
	Cum f 3/4						Cum f 3/4						Cum f 3/4						Cum f 3/4					
h	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	0.610	0.541	0.517	0.506	0.507	0.497	0.919	0.817	0.782	0.765	0.756	0.751	0.475	0.423	0.405	0.396	0.392	0.389	0.325	0.290	0.277	0.271	0.268	0.266
3	0.345	0.276	0.252	0.241	0.235	0.232	0.518	0.416	0.380	0.364	0.355	0.349	0.269	0.216	0.198	0.189	0.185	0.182	0.184	0.149	0.136	0.134	0.127	0.125
4	0.252	0.181	0.169	0.149	0.143	0.139	0.377	0.275	0.243	0.223	0.214	0.209	0.196	0.144	0.125	0.117	0.112	0.109	0.135	0.099	0.087	0.081	0.078	0.076
5	0.209	0.141	0.117	0.106	0.100	0.096	0.312	0.210	0.175	0.158	0.149	0.144	0.163	0.110	0.092	0.083	0.079	0.076	0.112	0.077	0.064	0.058	0.055	0.053
6	0.186	0.117	0.094	0.082	0.076	0.073	0.277	0.175	0.140	0.123	0.114	0.109	0.144	0.092	0.073	0.065	0.062	0.058	0.104	0.064	0.052	0.046	0.043	0.041
7	0.172	0.103	0.079	0.068	0.062	0.059	0.256	0.154	0.118	0.102	0.093	0.087	0.133	0.081	0.062	0.054	0.049	0.047	0.092	0.057	0.044	0.038	0.035	0.033

جدول10 : التباين التقريبي لمتوسط المعاينة الطبقية لطريقة $Cumf^{1/2}$ عندما Z و X لهما توزيع Bivariate normal بمعامل ارتباط ρ

Stratification variance																		
	$\rho = 0.2$						$\rho = 0.5$						$\rho = 0.9$					
h	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	0.49963	0.43652	0.41759	0.40882	0.40406	0.40119	0.34368	0.34368	0.32884	0.32197	0.31824	0.31599	0.10502	0.09433	0.09059	0.08885	0.08791	0.08734
3	0.27699	0.22289	0.20395	0.19519	0.19043	0.18756	0.17642	0.17642	0.16158	0.15472	0.15099	0.14874	0.0622	0.05151	0.04777	0.04603	0.04509	0.04452
4	0.20222	0.14812	0.12918	0.12042	0.11565	0.11278	0.11788	0.11788	0.10305	0.09618	0.09245	0.0902	0.04722	0.03652	0.03278	0.03105	0.0301	0.02954
5	0.16761	0.11351	0.09457	0.08581	0.08105	0.07818	0.09079	0.09079	0.07595	0.06908	0.06535	0.0631	0.04028	0.02958	0.02584	0.02411	0.02317	0.0226
6	0.14881	0.09471	0.07577	0.06701	0.06225	0.05938	0.07607	0.07607	0.06123	0.05436	0.05063	0.04838	0.03651	0.02582	0.02207	0.02031	0.0194	0.01883
7	0.13748	0.08337	0.06444	0.05567	0.05091	0.04804	0.06719	0.06719	0.05236	0.04549	0.04176	0.03951	0.03424	0.02354	0.0198	0.01807	0.01713	0.01656

جدول11 : التباين التقريبي لمتوسط المعاينة الطبقية لطريقة $Cumf^{1/3}$ عندما Z و X لهما توزيع **Bivariate normal** بمعامل ارتباط ρ

Stratification variance																		
							$\rho = 0.2$						$\rho = 0.5$					
h	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	0.73914	0.65748	0.6289	0.61567	0.60848	0.60415	0.58133	0.51734	0.49495	0.48458	0.47895	0.47556	0.15713	0.14099	0.13534	0.13272	0.1313	0.13045
3	0.41669	0.33503	0.30645	0.29322	0.28603	0.2817	0.32888	0.2649	0.2425	0.23214	0.2265	0.22311	0.0925	0.07636	0.07071	0.06809	0.06667	0.06582
4	0.30384	0.22217	0.19359	0.18036	0.17318	0.16884	0.24052	0.17654	0.15414	0.14378	0.13815	0.13475	0.06988	0.05374	0.04809	0.04547	0.04405	0.0432
5	0.2516	0.16994	0.14136	0.12813	0.12094	0.11661	0.19963	0.13564	0.11325	0.10288	0.09725	0.09386	0.05941	0.04327	0.03762	0.035	0.03358	0.03273
6	0.22323	0.14156	0.11298	0.09975	0.09257	0.08823	0.17741	0.11343	0.09103	0.08067	0.07504	0.07164	0.05372	0.03758	0.03193	0.02932	0.02789	0.02704
7	0.20612	0.12445	0.09537	0.08264	0.07546	0.07112	0.16402	0.10003	0.07764	0.06727	0.06164	0.05825	0.05029	0.03415	0.0285	0.02589	0.02447	0.02361

جدول12 : التباين التقريبي لمتوسط المعاينة الطبقية لطريقة $Cumf^{2/3}$ عندما Z و X لهما توزيع Bivariate normal بمعامل ارتباط ρ

Stratification variance																		
	$\rho = 0.2$						$\rho = 0.5$						$\rho = 0.9$					
h	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	0.38302	0.34086	0.3261	0.31927	0.31556	0.31332	0.30154	0.2685	0.25693	0.25158	0.24867	0.24692	0.0821	0.07416	0.07124	0.06989	0.06916	0.06872
3	0.21652	0.17436	0.1596	0.15277	0.14906	0.14682	0.17118	0.13814	0.12658	0.012123	0.11832	0.11656	0.04912	0.04079	0.03787	0.03652	0.03579	0.03534
4	0.15825	0.11608	0.10132	0.09449	0.09078	0.08854	0.12556	0.09252	0.08095	0.0756	0.07269	0.07094	0.03746	0.02911	0.02619	0.02484	0.0241	0.02366
5	0.13128	0.08911	0.07435	0.06752	0.06381	0.06157	0.10444	0.0714	0.05984	0.05448	0.05158	0.04982	0.03204	0.0237	0.02078	0.01943	0.0187	0.01826
6	0.11662	0.07446	0.0597	0.05287	0.04916	0.04697	0.09297	0.05993	0.04836	0.04301	0.0401	0.03835	0.0291	0.02076	0.01785	0.0165	0.01576	0.01532
7	0.10779	0.06562	0.05086	0.04403	0.04032	0.03808	0.08605	0.05301	0.04145	0.0361	0.03319	0.03143	0.02733	0.01899	0.01607	0.01472	0.01399	0.01355

جدول13 : التباين التقريبي لمتوسط المعاينة الطبقية لطريقة $\text{Cumf}^{3/4}$ عندما Z و X لهما توزيع Bivariate normal بمعامل ارتباط ρ

Stratification variance																		
							$\rho = 0.2$						$\rho = 0.5$					
h	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	0.26206	0.23339	0.22336	0.21871	0.21619	0.21467	0.20666	0.1842	0.17634	0.1727	0.17072	0.16953	0.05775	0.05208	0.0501	0.04918	0.04868	0.01838
3	0.14887	0.1202	0.11017	0.10552	0.103	0.10148	0.11804	0.09558	0.08772	0.08408	0.0821	0.08091	0.03506	0.02939	0.02741	0.02649	0.02599	0.02569
4	0.10925	0.08058	0.07055	0.0659	0.06338	0.06186	0.08702	0.06456	0.0567	0.05306	0.05109	0.04989	0.02712	0.02145	0.01947	0.01855	0.01805	0.01775
5	0.09091	0.06224	0.05221	0.04757	0.04504	0.04352	0.07267	0.05021	0.04234	0.03871	0.03673	0.03554	0.02344	0.01778	0.01579	0.01487	0.01438	0.01408
6	0.08095	0.05228	0.04225	0.03761	0.03508	0.03356	0.06487	0.04241	0.03455	0.03091	0.02893	0.02774	0.02145	0.01578	0.0138	0.01288	0.01238	0.01208
7	0.07494	0.04628	0.03624	0.0316	0.02908	0.02756	0.06017	0.0377	0.02984	0.0262	0.02423	0.02304	0.02024	0.01458	0.01259	0.01167	0.01118	0.01085

جدول14 : الكفاءة النسبية $\nu\left(\bar{y}_n\right)/\nu\left(\bar{y}\right)$ Cumf $^{1/2}$ عندما Z و X لهما توزيع Bivariate normal بمعامل ارتباط ρ

Stratification efficiency																		
	$\rho = 0.2$						$\rho = 0.5$						$\rho = 0.9$					
h	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	0.50629	0.45045	0.43091	0.42186	0.41695	0.41399	0.33089	0.29455	0.28184	0.27595	0.27275	0.27082	0.07336	0.06589	0.06327	0.06206	0.0614	0.06101
3	0.28584	0.23001	0.21046	0.20142	0.1965	0.19354	0.18754	0.15121	0.13849	0.1326	0.1294	0.12748	0.04345	0.03598	0.03336	0.03215	0.0315	0.0311
4	0.20869	0.15285	0.1331	0.12426	0.11935	0.11638	0.13737	0.10103	0.08832	0.08243	0.07923	0.07731	0.03298	0.02551	0.02289	0.02168	0.02103	0.02063
5	0.17297	0.11714	0.09759	0.08855	0.08363	0.08067	0.11415	0.07781	0.06509	0.05921	0.05601	0.05408	0.02813	0.02066	0.01805	0.01684	0.01618	0.01579
6	0.15357	0.09774	0.07819	0.06915	0.06424	0.06127	0.10153	0.0652	0.05248	0.04659	0.0434	0.04147	0.0255	0.01803	0.01542	0.01421	0.01355	0.01315
7	0.14188	0.08604	0.0665	0.05745	0.05254	0.04958	0.09393	0.05759	0.04487	0.03899	0.03579	0.03386	0.02392	0.01645	0.01383	0.01262	0.01196	0.01157

جدول15 : الكفاءة النسبية $v\left(\overline{y_n}\right)/\,v\left(\bar{y}\right)$ $Cumf^{1/2}$ عندما Z و X لهما توزيع Bivariate normal بمعامل ارتباط ρ

Stratification efficiency																		
	$\rho = 0.2$						$\rho = 0.5$						$\rho = 0.9$					
h	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	0.76273	0.67846	0.61896	0.63531	0.62789	0.62342	0.49824	0.44339	0.4242	0.41531	0.41049	0.40758	0.10945	0.09848	0.09453	0.0927	0.09171	0.09111
3	0.4363	0.34573	0.31623	0.30258	0.29516	0.29069	0.28188	0.22703	0.20784	0.19895	0.19413	0.19122	0.064	0.05333	0.04939	0.04756	0.04657	0.04597
4	0.31355	0.22927	0.19977	0.18612	0.1787	0.17423	0.20615	0.15131	0.13211	0.12323	0.1184	0.11549	0.0488	0.03753	0.03359	0.03176	0.03077	0.03017
5	0.25965	0.17537	0.14587	0.13222	0.1248	0.12033	0.1711	0.11626	0.09706	0.08818	0.08335	0.08044	0.0415	0.03022	0.02628	0.02445	0.02346	0.02286
6	0.23036	0.14609	0.11659	0.10294	0.09552	0.09105	0.15206	0.09722	0.07802	0.06914	0.06431	0.0614	0.03752	0.02625	0.0223	0.02048	0.01948	0.01889
7	0.21271	0.12843	0.09894	0.08528	0.07787	0.0734	0.14058	0.08574	0.06654	0.05766	0.05283	0.04992	0.03513	0.02385	0.04991	0.01808	0.01709	0.01619

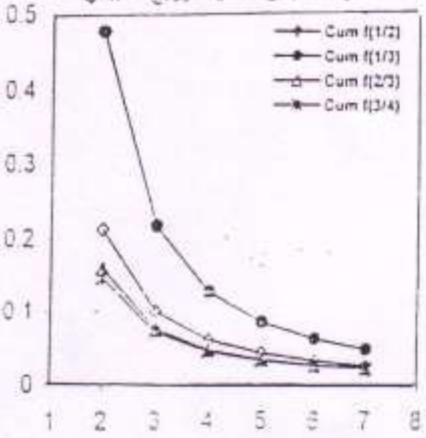
جدول16 : الكفاءة النسبية $v\left(\overline{y_n}\right)/\,v\left(\bar{y}\right)$ Cumf $^{1/2}$ عندما Z و X لهما توزيع Bivariate normal بمعامل ارتباط ρ

Stratification efficiency																		
	$\rho = 0.2$						$\rho = 0.5$						$\rho = 0.9$					
h	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	0.39525	0.35173	0.3365	0.32945	0.32562	0.32331	0.25844	0.23012	0.22021	0.21562	0.21313	0.21162	0.05762	0.0518	0.04976	0.04882	0.0483	0.018
3	0.22344	0.17992	0.16169	0.15381	0.15381	0.1515	0.14672	0.1184	0.10849	0.1039	0.10141	0.0999	0.03431	0.02849	0.02645	0.02551	0.02499	0.02469
4	0.16331	0.11979	0.10456	0.09368	0.09368	0.09137	0.10761	0.07929	0.06938	0.0648	0.0623	0.0608	0.02615	0.02033	0.01829	0.01735	0.01684	0.01653
5	0.13547	0.09196	0.07672	0.06585	0.06585	0.06354	0.08951	0.0612	0.05128	0.0467	0.0442	0.0427	0.02238	0.01655	0.01452	0.01357	0.01306	0.01275
6	0.12035	0.07684	0.06161	0.05073	0.05073	0.04842	0.07968	0.05136	0.04145	0.03686	0.03437	0.03287	0.02032	0.0145	0.01246	0.01152	0.01101	0.0107
7	0.1124	0.06772	0.05249	0.04161	0.04161	0.0393	0.07376	0.04544	0.03552	0.03094	0.02844	0.02694	0.01909	0.01327	0.01123	0.01028	0.00977	0.00916

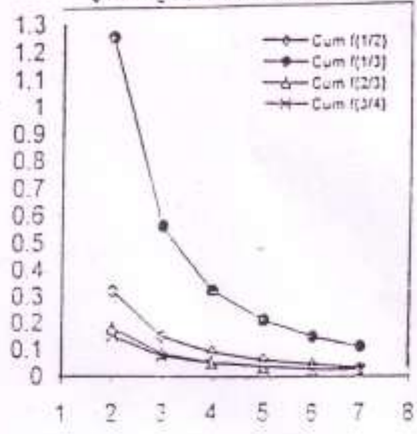
جدول17 : الكفاءة النسبية $\nu\left(\bar{y}_n\right)/\nu\left(\bar{y}\right)$ Cumf $^{1/2}$ عندما Z و X لهما توزيع Bivariate normal بمعامل ارتباط ρ

Stratification efficiency																		
	$\rho = 0.2$						$\rho = 0.5$						$\rho = 0.9$					
h	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7	2	3	4	5	6	7
2	0.27042	0.24084	0.23048	0.22569	0.22309	0.22152	0.17712	0.15787	0.15113	0.14801	0.14632	0.1453	0.04033	0.03638	0.03499	0.03435	0.034	0.03379
3	0.15362	0.12404	0.11368	0.10889	0.10629	0.10472	0.10117	0.08192	0.07518	0.07206	0.07037	0.06935	0.02449	0.02053	0.01914	0.0185	0.01815	0.01794
4	0.11274	0.08316	0.0728	0.06801	0.0654	0.06383	0.07459	0.05533	0.0486	0.04548	0.04378	0.04276	0.01894	0.01498	0.0136	0.01296	0.01261	0.0124
5	0.09382	0.06423	0.05388	0.04909	0.04648	0.04491	0.06228	0.04303	0.03629	0.03317	0.03148	0.03046	0.01637	0.01242	0.01103	0.01039	0.01104	0.00983
6	0.08354	0.05395	0.0436	0.03881	0.0362	0.03463	0.0556	0.03635	0.02961	0.02649	0.0248	0.02377	0.01498	0.01102	0.00964	0.00925	0.00865	0.00844
7	0.07734	0.04776	0.0374	0.03261	0.03001	0.02844	0.05157	0.03232	0.02558	0.02246	0.02077	0.01974	0.01414	0.01018	0.0088	0.00815	0.00781	0.0076

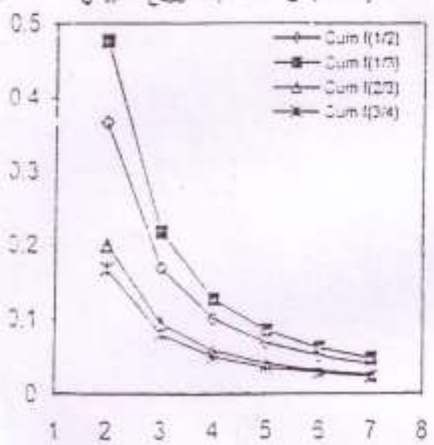
شكل (1)
تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند p=0.99
بالتخصيص الأمثل للتوزيع الطبيعي



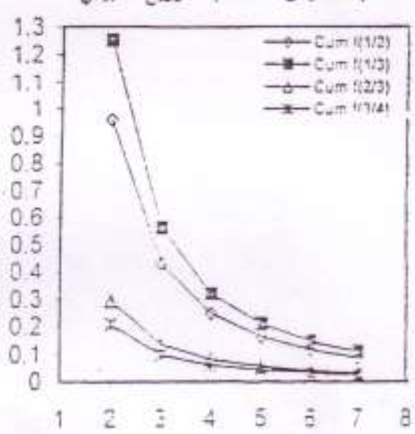
شكل (2)
تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند p=0.85
بالتخصيص الأمثل للتوزيع الطبيعي



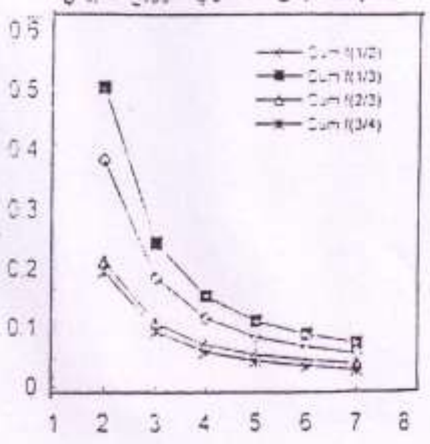
شكل (3)
تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند p=0.99
بالتخصيص المتناسب للتوزيع الطبيعي



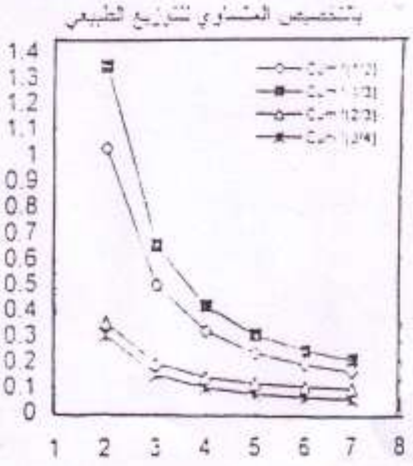
شكل (4)
تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند p=0.85
بالتخصيص المتناسب للتوزيع الطبيعي



شكل (5)
تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند p=0.99
بالتخصيص المتساوي للتوزيع الطبيعي



شكل (6)
تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند p=0.85
بالتخصيص المتساوي للتوزيع الطبيعي

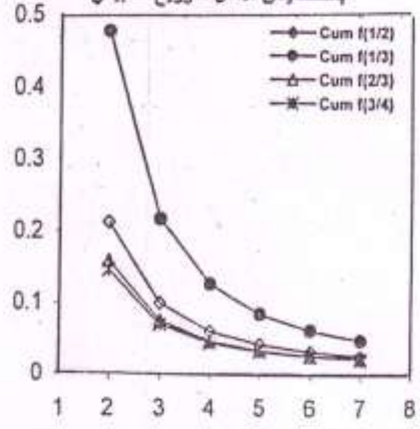


المحور الرأسي يمثل الكفاءة النسبية
المحور الأفقي يمثل عدد الطبقات.

شكل (1)

تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند $p=0.99$

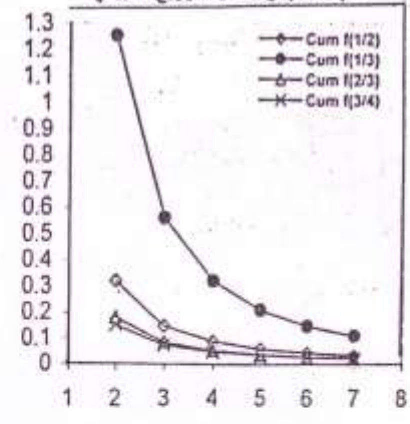
بالتخصيص الامثل للتوزيع الطبيعي



شكل (2)

تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند $p=0.85$

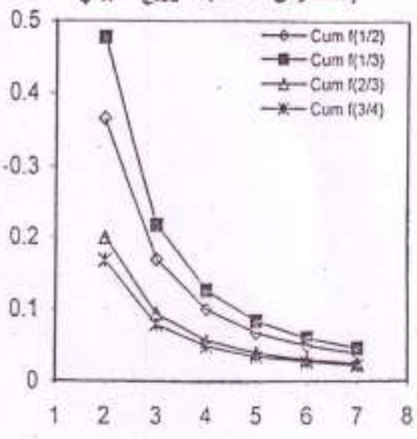
بالتخصيص الامثل للتوزيع الطبيعي



شكل (3)

تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند $p=0.99$

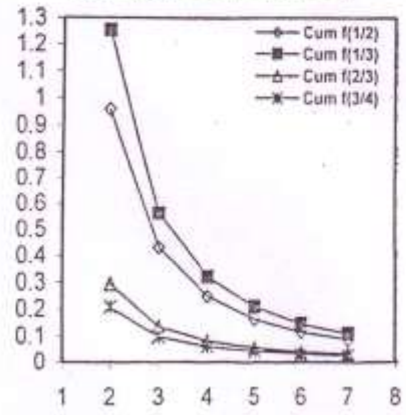
بالتخصيص المتناسب للتوزيع الطبيعي



شكل (4)

تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند $p=0.85$

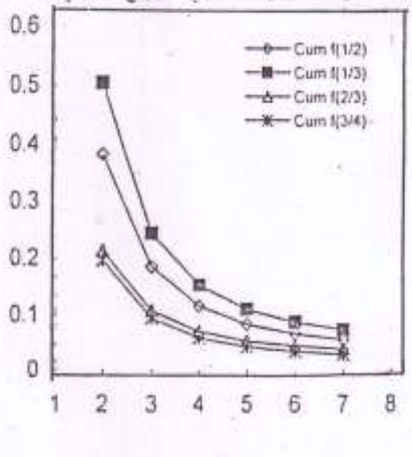
بالتخصيص المتناسب للتوزيع الطبيعي



شكل (5)

تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند $p=0.99$

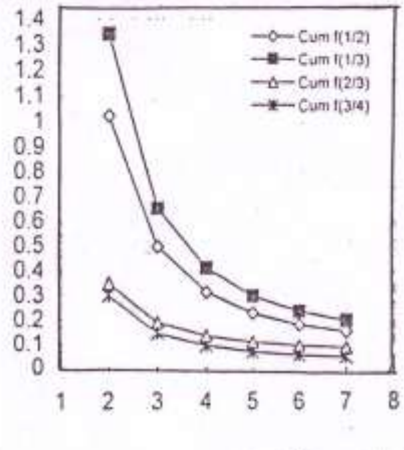
بالتخصيص المتساوي للتوزيع الطبيعي



شكل (6)

تأثير عدد الطبقات على الكفاءة عند $p=0.85$

بالتخصيص المتساوي للتوزيع الطبيعي



المحور الراسي يمثل الكفاءة النسبية

المحور الأفقي يمثل عدد الطبقات

المراجع:

....

المراجع العربية

1-العلي إبراهيم - 1980 مدخل إلى نظرية العينات -منشورات جامعة حلب -سوريه .

2- عبدالرحمن محمد أبو عمه ، الحسيني عبد الراضي ، محمد محمود إبراهيم هندي 1995 – مقدمة في المعاينة الإحصائية - منشورات - دار المريخ - الرياض - السعودية.

3- عودة أيمن ومنصور نوال 1995 - Visual basic ، دليل اللغة (ترجمة) الطبعة الأولى - دار شعاع للنشر والعلوم - حلب - سوريه . 1189 صفحة .

المراجع الأجنبية :

1- Anderson , D. W., Kish, L. and Cornell, R. G. (1976) ‘ Quantity gains from stratifification for optimum and approximately optimum stratausing a bivariate normal model” , Journal of the American Statistical Association, 71,887-892

2- Anderson, D. W., Kish, L. and Cornell, R. G. (1980) On stratification grouping and matching ‘ , Journal of Statistics, 7 , 66

3- Chatterjee, S. (1968) “ Multivariate stratified surveys “ , Journal of the American Statistical Association, 63, 530-543

4- Cochran, W . G. (1977) “ Sampling Techniques” 3rd edition, John, Wiley & Sons, New York.

5- Dalenius, T . , and Hodges, J . L . (1959) “ Minimum variance stratification “ , Journal of the American Statistical Association , 54 , 88-101

6- Frontier S., 1982. - Strategie dechantillonnage . Masson, Paris , Fr. 462 P.

7- Huddleston, H. F.. Claypool, P. L. and Hocking, R.R. (1970) “ Optimum sample allocation to strata using convex programming “ , Applied Statistics, 19, 273-278

8- AL – kassab, M. M. and AL-Tauy , H. (1994) “ Approximately optimal stratification using Neyman allocation “ J. of Tanmiat AL – Rafidian , 19, 31-37

9- Kish, 1., and Anderson, D. W. (1978) “ Multivariate and multipurpose stratification “ Journal of the American Statistical Association, 73 , 24 –34

10- Kokan, A. R. and Khan, S. (1967) “ Optimum allocation in multivariate surveys: An analytical solution “ , Journal of Royal Statistical Society, B, 29, 115-125

11- Law, A. M. & Kelton, W . D. (1991) “ Simulation modeling

and analysis" 2^{nd} Edition McGraw- Hill, New York.
12- Morgan, B . J . T . (1987) " Elements of simulation" Chapman and Hall. London.
13- Pidd M. (1998) " Computer simulation in management science " 4th Edition, New York, John Wiley & sons.
14- Ronaldo, I. (1985) " Optimum boundaries for shellfish surveys " , Biometrics, 41, 1053-1062 .
15- Serfling, R. J. (1968) " Approximately optimum stratification " , Journal of the American Statistical Association, 63, 1298-1309
16- Sethi (1963) " Anote on optimum stratification of population for estimating the Population means " Journal of the American Statistical Association, 5, 20-33
17- Thompson, I. (1976) " A comparison of approximately optimal stratification given proportional allocation with other methods of stratification and allocation" , Biometrika, 23 , 15-25
18- Thompson, I. (1977) " on the effect of stratification when two stratifying variables are used " , Journal of the American Statistical Association, 72, 149-153
19- Wright, R. L (1983) " Finite population sampling with multivariatc auxiliary information " Journal of the American Statisical Association , 76 , 879-884
20- Yates, F. (1981) " Sampling methods for census and surveys" , Charles Griffin and CO . , London , 4th edition .