



## مجلة جامعة تشرين - سلسلة العلوم الاقتصادية والقانونية

اسم المقال: التمديد الداخلي لبيانات السلسل الزمنية باستخدام دوال الـ Spline

اسم الكاتب: د. أيمن نايف العشوش

رابط ثابت: <https://political-encyclopedia.org/library/4212>

تاريخ الاسترداد: 2025/05/16 06:21 +03

الموسوعة السياسية هي مبادرة أكاديمية غير هادفة للربح، تساعد الباحثين والطلاب على الوصول واستخدام وبناء مجموعات أوسع من المحتوى العلمي العربي في مجال علم السياسة واستخدامها في الأرشيف الرقمي الموثوق به لإغناء المحتوى العربي على الإنترنت.

لمزيد من المعلومات حول الموسوعة السياسية – Encyclopedia Political، يرجى التواصل على [info@political-encyclopedia.org](mailto:info@political-encyclopedia.org)

استخدامكم لأرشيف مكتبة الموسوعة السياسية – Encyclopedia Political يعني موافقتك على شروط وأحكام الاستخدام المتاحة على الموقع <https://political-encyclopedia.org/terms-of-use>

تم الحصول على هذا المقال من موقع مجلة جامعة تشرين - سلسلة العلوم الاقتصادية والقانونية - ورفده في مكتبة الموسوعة السياسية مستوفياً شروط حقوق الملكية الفكرية ومتطلبات رخصة المشاع الإبداعي التي ينضوي المقال تحتها.



## التمديد الداخلي لبيانات السلسلة الزمنية

### باستخدام دوال الـ Spline

الدكتور أيمن نايف العشعوش \*

(تاریخ الإیادع 11 / 3 / 2010 . قُبِل للنشر في 30 / 6 / 2010)

#### □ ملخص □

تناولت هذه الدراسة واحدة من المشكلات التي تتعرض الباحث في مجالات العلوم المختلفة وبشكل خاص في مجال العلوم الاقتصادية، والمتمثلة بنقص المعطيات أو عدم توفرها كاملة لإجراء البحث المطلوب. فالسلسلة الزمنية الاقتصادية غالباً ما تكون غير مكتملة، بمعنى أن بعض المعطيات تكون متوفرة عند فترات زمنية معينة ومتقطعة في فترات زمنية أخرى. تدعى عملية استكمال هذه البيانات بالتمديد الداخلي لبيانات Interpolation.

استخدمنا في هذه الدراسة بيانات واقعية لسلسلة زمنية اقتصادية تمثل مبالغ الإنفاق السنوي على الناتج المحلي الإجمالي في سوريا للفترة من 1975 إلى 1995 أي 28 مشاهدة سنوية متوفرة منها فقط ست مشاهدات. لجأنا لإجراء التمديد الداخلي للمفردات الأخرى للسلسلة طريقة دوال الـ Spline وبعض الطرائق التقليدية الأخرى. لقد أوضحت النتائج الإحصائية أفضليّة لاستخدام طريقة دوال الـ Spline من ناحية دقة صقل النتائج وعدم استخدام درجات كبيرة لكثيرات الحدود مما يجنبنا الوقوع بما يسمى بظاهرة رانج Runge's phenomenon الناجمة عن استخدام درجات كبيرة لكثير الحدود المستخدم.

**الكلمات المفتاحية:** سلسلة زمنية - كثیرات حدود - تمديد داخلي لبيانات - دوال الـ Spline

\* مدرس - قسم الإحصاء والبرمجة - كلية الاقتصاد - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

## Interpolation de Données Chronologiques en Utilisant Les Fonctions de Spline

Dr. Ayman Achouch\*

(Déposé le 11 / 3 / 2010. Accepté 30 / 6 /2010)

### □ Résumé □

L'objectif de cet article est de traiter un des problèmes qu' affronte le chercheur dans les divers domaines de la science, et en particulier dans le domaine de sciences économiques. Ce problème concerne le manque de données disponibles nécessaires pour effectuer la recherche. En effet, les données économiques sont souvent incomplètes ce qui signifie que certaines données soient disponibles à certaines périodes et indisponibles dans d'autres périodes.

Nous avons utilisé dans cette étude des données réalistes de séries chronologiques représentant les montants annuels des dépenses publiques relatives au PIB en Syrie pour la période allant de 1975 à 1995 soit 28 observations, six observations sont seulement disponibles. Pour interpoler les données manquantes, nous avons utilisé certaines méthodes traditionnelles de lissage et la méthode de Spline. Les résultats statistiques ont montré une préférence pour la méthode de Spline où le lissage de données est plus fin et le nombre de degrés de polynôme est plus petit que dans la méthode de lissage, ce qui aide à éviter ce que l'on appelle "le phénomène de Range" résultant de l'utilisation de grand degré de polynôme.

**Mots-clés:** Séries chronologiques – Polygones - Interpolation – Fonctions de Spline.

---

\* Enseignant, Faculté d'Économie, Département de Statistique et de Programmation, Université Tichrine, Lattaquié, Syrie.

### مقدمة:

في مجال الرياضيات عموماً، وبشكل خاص في التحليل الرياضي العددي، يعد التمديد الداخلي للبيانات Interpolation (يستخدم أحياناً مصطلح الاستقراء الداخلي) إحدى الطائق الرياضية التي نستطيع من خلالها إيجاد مجموعة من النقاط غير المعلومة الواقعة بين مجموعة من النقاط المعلومة. بمعنى آخر، يهدف التمديد الداخلي للبيانات إلى إيجاد القيم المجهولة للسلسلة الزمنية المقابلة للحظات زمنية واقعة داخل المجال الزمني الذي تدرس فيه السلسلة الزمنية المفروضة.

وفي مجال العلوم التطبيقية و الهندسية غالباً ما تتم معالجة هذه المسألة من خلال التجارب التطبيقية أو عن طريق ما يسمى بالمعاينة الإحصائية، حيث نحاول إيجاد دالة رياضية function توفق إلى أبعد حد نتائج التجارب الممثلة بمجموعة من النقاط. تسمى هذه الطريقة التوفيق بواسطة منحنى Curve fitting أو تحليل الانحدار Regression analysis. بينما يعد التمديد الداخلي للبيانات حالة خاصة من طريقة توفيق المنحنى، حيث يفترض بالدالة الرياضية أن تمر بدقة بجميع نقاط البيانات المعلومة.

### مشكلة البحث:

تتمثل مشكلة البحث في أن معظم طرائق التمديد الداخلي للبيانات و المستخدمة لتعويض القيم المفقودة في بيانات السلسلة الزمنية، تعتمد على أساليب حسابية بسيطة مثل المتوسط الحسابي للقيم المجاورة للقيمة المفقودة أو استخدام ما يسمى بكثيرات الحدود لتعويض عن هذه القيمة. وهذه الطائق التقليدية غالباً ما تقود إلى نتائج مضللة وليس دقة بالشكل الكافي مما ينعكس سلباً على استخدام النموذج المقدر في عمليات التنبؤ الاقتصادي. فالباحث في مجال العلوم الاقتصادية عموماً وبشكل خاص عند دراسة وتحليل معطيات السلسلة الزمنية غالباً ما يواجه مشكلة عدم اكتمال معطيات السلسلة الزمنية المدروسة وبالتالي يتوجب عليه استخدام الطريقة المناسبة لمعالجة هذه القيم المفقودة واستبدالها بقيم تكون أقرب إلى القيم الحقيقية.

### أهمية البحث وأهدافه:

من المعلوم أن تحليل السلسلة الزمنية و استخدام معظم الاختبارات الإحصائية يستلزم توفر عدد كبير من المشاهدات كي يتمكن الباحث من اللجوء إلى الطريقة المناسبة لتقدير النموذج و اختبار فرضه البحثية. وبما أن الكثير من البلدان تعاني من مشكلة نقص المعطيات أو عدم اكتمالها و بشكل خاص تلك الدول التي لا تتوفر فيها مراكز متخصصة لجمع وتبسيط ونشر البيانات الإحصائية أو لدى بعض الدول التي أنشأت هذه المراكز حديثاً أو لأسباب أخرى متعددة اقتصادية أو سياسية أو غير ذلك، فإن أهمية هذا البحث تتمثل في تقديم طريقة خاصة في معالجة مسألة التمديد الداخلي للبيانات تتجنب مساوى الطائق التقليدية و تعطي نتائج أفضل.

الهدف من هذا البحث هو إمكانية استخدام طريقة دوال Spline كأداة للتمديد الداخلي لبيانات السلسلة الزمنية و مقارنة نتائج هذه الطريقة مع الطائق الأخرى المستخدمة في هذا المجال. حيث تعتبر هذه الطريقة قليلة الاستخدام في مجال التمديد الداخلي للبيانات و عادةً ما يتم الالتفاء باستخدام بعض الطائق التقليدية المعتمدة على استخدام متعددات أو كثيرات الحدود رغم التحذير من اللجوء إلى هذه الطائق التي قد تقود أحياناً إلى نتائج غير دقيقة و خصوصاً عند استخدام درجات كبيرة لكثيرات الحدود المستخدمة. فعوضاً عن استخدام معادلة واحدة لتقدير جميع

القيم المفقودة في السلسلة، فإننا نستخدم عدة معادلات بحيث ينحصر لكل مجال جزئي معادلة خاصة به تستخدم لتعويض القيم المفقودة ضمن ذلك المجال.

### **منهجية البحث:**

نعتمد في هذا البحث على المنهج التجريبي حيث سنعتمد مجموعة من المعطيات الاقتصادية غير المكتملة والممثّلة بواسطة سلسلة زمنية ونحاول استكمالها، أي تمديدها داخلياً، باستخدام بعض الطرائق التقليدية للتمديد الداخلي بواسطة متعددات أو كثيرات الحدود. هناك ثالث طرائق للتمديد الداخلي بواسطة كثيرات الحدود، الطريقة المباشرة وطريقة نيوتن Newton وطريقة لاغرانج Lagrange (Van L., Charles F., 1997) ونكتفي في هذا البحث بعرض الطريقة المباشرة وتطبيقاتها باستخدام كثيرات الحدود من الدرجات الأولى والثانية والثالثة. بعد ذلك نشرح بشيء من التبسيط طريقة دوال da Spline للتمديد الداخلي لبيانات ونعمل إلى تطبيقها على معطيات فعلية مأخوذة من المجموعة الإحصائية باستخدام درجات مختلفة لكثيرات الحدود المستخدمة ونقارن بين الطريقتين.

### **فرضيات البحث:**

ما سبق يمكننا الآن صياغة بعض الفرضيات البحثية و المرتبطة بشكل أساسى بجدوى استخدام طريقة دوال da Spline كأداة فعالة في عمليات التمديد الداخلي لمعطيات السلسل الزمنية ومقارنتها بالطرائق التقليدية المستخدمة. نلخص هذه الفرضيات بال نقطتين التاليتين:

- لا تعدد نتائج التمديد الداخلي لبيانات السلسل الزمنية باستخدام دوال da Spline أكثر دقة و صقلًا من النتائج التي يتم الحصول عليها باستخدام الطرائق التقليدية.
- رغم استخدام الطرائق التقليدية لدرجات كبيرة في كثيرات الحدود المستخدمة، فإنها لا تعطي نتائج أفضل أو حتى مشابهة لتلك التي يمكن الحصول عليها بطريقة دوال da Spline.

### **الإطار النظري:**

#### ما هو التمديد الداخلي لبيانات؟

في كثير من الحالات، يكون لدينا دالة  $y = f(x)$  معلومة عند بعض النقاط المنفصلة مثل  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . و نتسائل هنا عن كيفية إيجاد قيمة  $y$  عند بعض النقاط الأخرى غير الموجودة ضمن البيانات المعطاة كالنقطة  $x$  على سبيل المثال؟ في هذه الحالة يمكن للدالة المستمرة  $f(x)$  أن تكون مستخدمة لتمثيل قيم  $n+1$  نقطة حيث تمر  $f(x)$  عبر هذه النقاط. بعدئذ نستطيع إيجاد قيمة  $y$  عند أية قيمة أخرى من قيم  $x$ . تسمى هذه العملية التمديد الداخلي لبيانات (Suli, Mayers, 2003). أما في حال كانت القيمة  $x$  تقع خارج مجال القيم المعلومة فإننا في هذه الحالة نستخدم مفهوم التمديد الخارجي لبيانات .Extrapolation

التساؤل هنا هو حول اختيار نوع الدالة الرياضية؟ في معظم الحالات يتم اختيار كثير الحدود كدالة للتمديد الداخلي وذلك لكون كثيرات الحدود سهلة في عمليات التعويض والتفاضل والاشتقاق من الدوال الأخرى الجيبية أو الآسيّة أو غيرها.

**أولاً: التمديد الداخلي بواسطة كثيرات (متعددات) الحدود**

تستلزم عملية التمديد الداخلي بهذه الطريقة إيجاد كثير الحدود من الدرجة  $n$  الذي يمر في  $(n+1)$  نقطة. وكما سبق وشرنا هناك مجموعة من الطرق المستخدمة لإيجاد كثير الحدود المناسب (Kaw, Keteltas, 2004) وسنكتفي هنا بعرض الطريقة المباشرة مع الإشارة إلى أن طريقتي نيوتن ولاغرانج تعطيان نتائج متطابقة. تستند الطريقة المباشرة للتمديد الداخلي على النقاط التالية. بافتراض لدينا  $(n+1)$  نقطة من البيانات، و هذه النقاط تم توفيقها بواسطة كثير حدود من الدرجة  $n$  على النحو التالي:

$$(1) \quad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

حيث  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  تمثل  $(n+1)$  ثابت حقيقي. و لأن  $\frac{dy}{dx}$  معطاة عند  $(n+1)$  قيمة  $x$  فإنه يمكننا كتابة  $n+1$  معادلة. و بعد ذلك نستطيع إيجاد الثوابت  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . من خلال حل مجموعة  $(n+1)$  معادلة خطية حلًا مشتركاً. بعد ذلك لإيجاد قيمة  $y$  عند أي نقطة  $x$ ، نعرض بكل بساطة هذه القيمة في المعادلة (1) بعد استبدال الثوابت بقيمها المقدرة الناتجة. عملياً، يتم استخدام درجات مختلفة لكثيرات الحدود و غالباً ما تكون من الدرجة الأولى أو الثانية أو الثالثة و كلما ازدادت درجة كثير الحدود المستخدمة أصبح المنحنى الممثل للبيانات أكثر صقلًا.

ولكن من المهم الإشارة هنا إلى أنه ليس من الضروري أن نستخدم كل النقاط المعلومة، وبالتالي ما هي درجة كثير الحدود الواجب استخدامها؟ وما هي النقاط التي ستدخل في الحساب؟ الإجابة عن هذه التساؤلات سيتم توضيحيها من خلال المعطيات المعروضة في فقرة النتائج والمناقشة.

**ثانياً: التمديد الداخلي للبيانات بواسطة دوال Spline**

استخدمنا في المعالجة السابقة للتمديد الداخلي للبيانات كثير حدود معين لنقريب الدالة  $f$  المعرفة على مجال محدد  $[a, b]$  و ذلك بواسطة الطريقة المباشرة. و هذه الطريقة تستند على استخدام نفس الأداة التحليلية لنقريب الدالة على كامل المجال  $[a, b]$ . بينما في الطريقة الحالية فإنه يتم تقسيم المجال إلى عدة مجالات جزئية ومن ثم نقريب كل جزء بواسطة كثير حدود ذو درجة منخفضة. (Nievergelt, Yves, 1993)

يمثل  $\text{Spline}$  شكلاً خاصاً من أشكال الدوال الرياضية المعرفة على عدة قطع piecewise بواسطة كثير حدود (Ahlberg, Walsh, 1967). و في مجال التمديد الداخلي للبيانات، فإن تقنية  $\text{Spline}$  تعتبر أفضل من الاستخدام العادي لكثير الحدود السابق شرحه في الفقرات السابقة، و ذلك لأنه يقدم نتائج مماثلة لتلك الناتجة باستخدام كثير الحدود و لكن مع عدد أقل في درجة كثير الحدود المستعمل و بذلك فإنه يتجنب المستخدم من الوقوع بمشكلة ما يسمى بظاهرة رانج Runge's phenomenon (Carl, D., 2001). فقد وجد رانج أن زيادة درجة كثير الحدود إلى مستويات كبيرة<sup>1</sup> تجعله، في كثير من الحالات، يتبع عن الدالة الحقيقية. بالإضافة إلى ذلك، فإن الأخطاء الناجمة عند استخدام التمديد الداخلي بواسطة  $\text{Spline}$  أقل من مثيلاتها في الحالات السابقة رغم استخدام درجة أقل لكثير الحدود.

<sup>1</sup> اختبر رانج تمديداً داخلياً لبيانات مأخوذة من الدالة  $y = 1/(1+25x^2)$  و ضمن المجال  $[-1, 1]$  و اعتبر ست نقاط متساوية المسافة فيما بينها و حاول أن يمرر عبر هذه النقاط السنت كثيرات حدود من الدرجات 5، 12 و 19. وكانت النتيجة تباعد منحنى كثير الحدود عن المنحنى الأصلي كلما ازدادت درجة كثير الحدود.

باختصار يمكن تلخيص المبدأ الأساسي لمفهوم التمديد الداخلي بواسطة دوال الـ Spline على النحو التالي. يتم تقسيم مجال التمديد الداخلي إلى عدة مجالات جزئية أصغر و بعد ذلك يتم إجراء التمديد الداخلي لكل جزء باستخدام كثير حدود من درجة معينة. الدوال الناتجة تسمى دوال الـ Splines و تسمى نهايات كل مجال جزئي بالعقد Knots . تخضع عواملات كثير الحدود عند اختيارها لمجموعة من الشروط (تتعلق بطريقة التمديد الداخلي). و لكن بشكل عام تستلزم هذه الطريقة استمرارية الدوال و مرورها بالتأكيد بجميع النقاط المعطاة. و أحياناً يكون هناك شروط أخرى تتعلق بخطية الدالة بين النقاط و بوجود و استمرارية المشتقات الجزئية.(Rorres, Chris and Howard, 1984)

#### • تعريف:

بفرض لدينا المجموعة التالية من النقاط المعلومة  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ . ولدينا  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  فان إيجاد دوال الـ Spline من الدرجة  $n$  يعني إيجاد الدالة التالية: (McKinley, Levine, 2004)

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

حيث كل  $S_i(x)$  يمثل كثير حدود من الدرجة  $k$  و كل واحدة منها تدعى دالة من دوال الـ Spline.

#### • التمديد الداخلي الخطى بواسطة Spline

يعتبر التمديد الداخلي الخطى بواسطة دوال الـ Spline الشكل الأبسط من أشكال دوال الـ Spline. وهو يكفى التمديد الداخلي الخطى الذي سبق و شرحناه سابقاً. حيث يتم استخدام القطع المستقيمة للوصل بين النقاط المعلومة، وبالتالي فان دالة الـ Spline الناتجة، في حال تم وصل النقطة الأولى من البيانات بالنقطة الأخيرة، ليست أكثر من مضلع تكراري عادي. (Sandwell, D.T., 1987)

جيرياً، كل  $S_i(x)$  تمثل دالة خطية من الدرجة الأولى لها الشكل التالي:  $S_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$

وبالتالي تصبح دالة الـ Spline: (Epperson, 1998)

$$S(x) = \begin{cases} y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) & x \in [x_0, x_1] \\ y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} (x - x_{n-1}) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

مع ملاحظة أن الحدود  $\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$  في الدالة السابقة ليست إلا الميل بين  $x_{i-1}$  و  $x_i$ .

كما أن دوال الـ Spline يجب أن تكون مستمرة عند كل نقطة من نقاط البيانات، أي:

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1$$

و هذا يمكن التحقق منه بسهولة من خلال ملاحظة التالي:

$$S_{i-1}(x_i) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = y_i$$

$$S_i(x_i) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x_i - x_{i+1}) = y_i$$

### • التمديد الداخلي التربيعي بواسطة Spline

في هذه الحالة يتم استخدام كثير حدود من الدرجة الثانية لتمثيل البيانات بين نقطتين متتاليتين. فإذا كان لدينا مجموعة من النقاط  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ، فإن دالة Spline تأخذ الشكل

(Hanselman, D., 1998) التالي:

$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

أو بشكل أكثر تفصيلاً:

$$S(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 x + c_1 & x \in [x_0, x_1] \\ a_2 x^2 + b_2 x + c_2 & x \in [x_1, x_2] \\ . \\ a_n x^2 + b_n x + c_n & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

و هنا السؤال عن كيفية حساب المعاملات السابقة، حيث يوجد  $(3n)$  معامل يجب حسابه. لأجل ذلك نحتاج إلى  $(3n)$  معادلة و بعد ذلك نحلهم حلاً مشتركاً.

لدينا أولاً  $(2n)$  معادلة ناتجة من واقع مرور كل Spline تربيعي بنقطتين متتاليتين:

$$\begin{aligned} a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 &= y_0 \\ a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 &= y_1 \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i &= y_{i-1} \\ a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i &= y_i \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} a_n x_{n-1}^2 + b_n x_{n-1} + c_n &= y_{n-1} \\ a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n &= y_n \end{aligned}$$

لدينا أيضاً  $(n-1)$  معادلة ناتجة من واقع كون المشتقات الجزئية الأولى لكل دالة Spline مستمرتين عند النقاط الداخلية. فعلى سبيل المثال، المشتقالجزئي الأول للـ Spline الأول هو  $2a_1 x + b_1$  وللثاني  $2a_2 x + b_2$ . و كشرط للاستمرارية يجب أن يتساوي هذا المشتقان عندما  $x = x_1$

$$\begin{aligned} 2a_1 x_1 + b_1 &= 2a_2 x_1 + b_2 \\ 2a_1 x_1 + b_1 - 2a_2 x_1 - b_2 &= 0 \end{aligned}$$

و بشكل مماثل للنقاط الداخلية الأخرى:

$$2a_2x_2 + b_2 - 2a_3x_2 - b_3 = 0$$

.

.

.

$$2a_ix_i + b_i - 2a_{i+1}x_i - b_{i+1} = 0$$

.

.

.

$$2a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1} - 2a_nx_{n-1} - b_n = 0$$

وبالتالي فانه أصبح لدينا الآن  $(2n) + (n-1) = (3n-1)$  معادلة. إذن ما زلنا بحاجة إلى معادلة واحدة إضافية لاستكمال العدد إلى  $(3n)$  معادلة. يمكننا من أجل ذلك افتراض خطية الدالة Spline الأولى، أي:  $a_1 = 0$ . أصبح لدينا الآن  $(3n)$  معادلة و  $(3n)$  معامل مجهول. بالحل المشترك نجد هذه المعاملات.

#### • التمديد الداخلي التكعبي بواسطة Spline

في هذه الحالة يتم استخدام كثير حدود من الدرجة الثالثة لتمثيل البيانات بين نقطتين متتاليتين. فإذا كان لدينا مجموعة من النقاط  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ، فإن دالة الدالة Spline تأخذ الشكل التالي:

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad \text{for } i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

أو بشكل أكثر تفصيلاً:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S_1(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

تعتبر المشتقات الجزئية من الدرجة الأولى و الثانية للأ  $n-1$  معادلة من العناصر الأساسية لهذه الطريقة.

وهذه المشتقات هي من الشكل التالي:

$$\begin{aligned} S'_i(x) &= 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i \\ S''_i(x) &= 6a_i x + 2b_i \end{aligned}$$

وبإضافة الشروط الاعتيادية للتمديد الداخلي، و لكي يكون المنحنى  $S(x)$  مستمراً وبدون انقطاع، يجب في هذه الطريقة أن تكون كل دالة جزئية موصولة بنقاط البيانات، أي:

$$S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i)$$

وأن تكون المشتقات الجزئية السابقة مستمرة لجعل المنحنى صقيلاً بين هذه النقاط، أي يجب تحقق:

$$\begin{aligned} S'_{i-1}(x_i) &= S'_i(x_i) \\ S''_{i-1}(x_i) &= S''_i(x_i) \end{aligned}$$

و ذلك من أجل  $i = 1, \dots, n-1$ .

كذلك يجب افتراض أن المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية تتراهى إلى الصفر عند النقطتين الطرفيتين، أي:

$$\begin{aligned} S''_0(x_0) &= 0 \\ S''_{n-1}(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

### النتائج والمناقشة:

تمثل البيانات التالية المعروضة في الجدول 1 مبالغ الإنفاق السنوي على الناتج المحلي الإجمالي في سوريا بـملايين الليرات السورية و بالأسعار الجارية للفترة الزمنية من 1975 إلى 1995.

**الجدول 1: الإنفاق على الناتج المحلي الإجمالي في سوريا**

العام	الإنفاق (بملايين الليرات)
1975	20597
1980	51270
1985	83225
1990	268328
1993	413755
1995	570975

المصدر: المجموعة الإحصائية السورية لعام 2006.

من الواضح أن معطيات السلسلة الزمنية السابقة غير مكتملة فعدد مفرداتها الإجمالي يساوي 28 بينما المتوفر منها ستة فقط. سنعمل الآن على تحديد قيمة الإنفاق السنوي على الناتج المحلي لعام 1986 باستخدام الطريقة المباشرة و بواسطة كثير حدود من الدرجة الأولى ثم من الدرجة الثانية و أخيراً من الدرجة الثالثة، ثم بعد ذلك نعرض نتائج التمديد الداخلي لكامل مفردات السلسلة.

- **التمديد الداخلي بواسطة كثيرات الحدود**

#### الحالة الأولى: كثير حدود من الدرجة الأولى

نعبر عن الإنفاق في حالة التمديد الداخلي بواسطة كثير الحدود من الدرجة الأولى (يسمى أحياناً التمديد الداخلي الخطى Linear interpolation ) بالمعادلة التالية:

$$e(t) = a_0 + a_1 t$$

حيث  $t$  تمثل السنة و  $e(t)$  الإنفاق في السنة  $t$  و لأن المطلوب إيجاد الإنفاق عند  $t = 1986$  ، نختار نقطتين فقط من النقاط المعلومة بحيث يكونان الأقرب إلى النقطة  $t = 1986$  و يقعان بجوارها. هاتين النقطتين هما  $t_0 = 1985$  و  $t_1 = 1990$  . و وبالتالي:

$$e(1985) = a_0 + a_1 (1985) = 83225$$

$$e(1990) = a_0 + a_1 (1990) = 268328$$

و بالحل المشترك للمعادلتين السابقتين نحصل على:

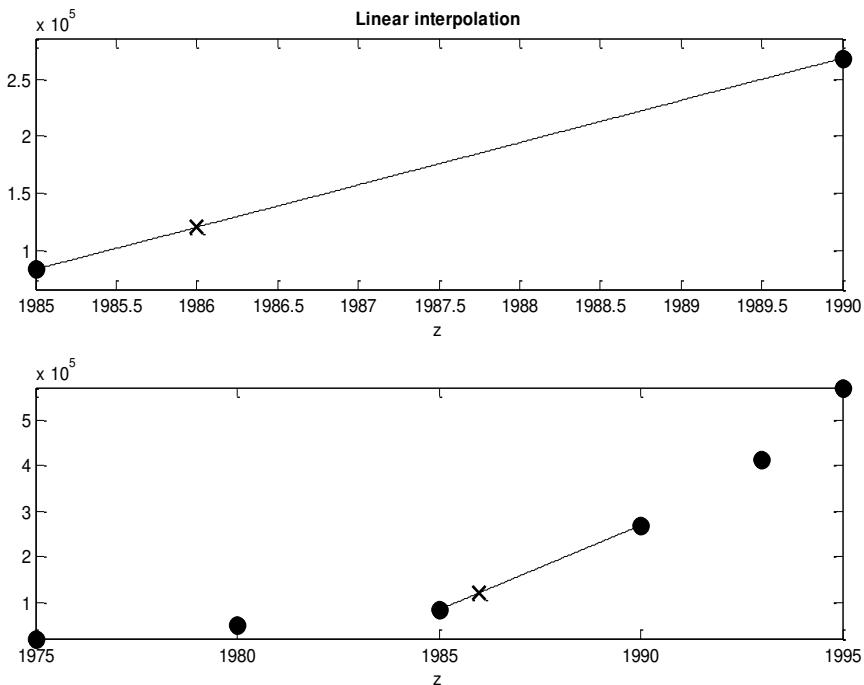
$$a_1 = 37020.6 \quad \text{و} \quad a_0 = -73402669$$

و وبالتالي للحصول على الإنفاق المطلوب في العام  $t = 1986$  ، نعرض بالعلاقة المقدرة:

$$e(1986) = 120245.6, \quad 1985 \leq t \leq 1990$$

يوضح الشكل 1 تمثيل المعطيات بيانياً و التمديد الداخلي الخطى.

ملاحظة: لا تصلح الدالة المقدرة الناتجة إلا من أجل عمليات التمديد الداخلي للقيم المحسوبة بين عامي 1985 و 1990، وبالتالي لإجراء التمديد الداخلي لقيم خارج هذا المجال الزمني يلزم إيجاد دالة أخرى بنفس الطريقة السابقة. أي أنه سيكون هناك لكل مجال جزئي دالة تمديد داخلي خاصة به.



الشكل 1 : التمثيل الخطى للسلسلة الزمنية و التمديد الداخلى الخطى لإنفاق عام 1986

#### الحالة الثانية: كثير حدود من الدرجة الثانية

تعبر عن الإنفاق في حالة التمديد الداخلي بواسطة كثير الحدود من الدرجة الثانية (يسمى أحياناً التمديد الداخلي التربيعى Quadratic interpolation ) بالمعادلة التالية:

$$e(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

و لأن المطلوب إيجاد الإنفاق عند  $t = 1986$  ، نختار ثلث نقاط فقط من النقاط المعلومة بحيث تكون الأقرب إلى النقطة  $t = 1986$  و تكون النقطة المطلوبة متوضعة فيما بينها. هذه النقاط هي  $t_0 = 1980$  و  $t_1 = 1985$  و  $t_2 = 1990$  . و بالتالي:

$$e(1980) = a_0 + a_1 (1980) + a_2 (1980)^2 = 51270$$

$$e(1985) = a_0 + a_1 (1985) + a_2 (1985)^2 = 83225$$

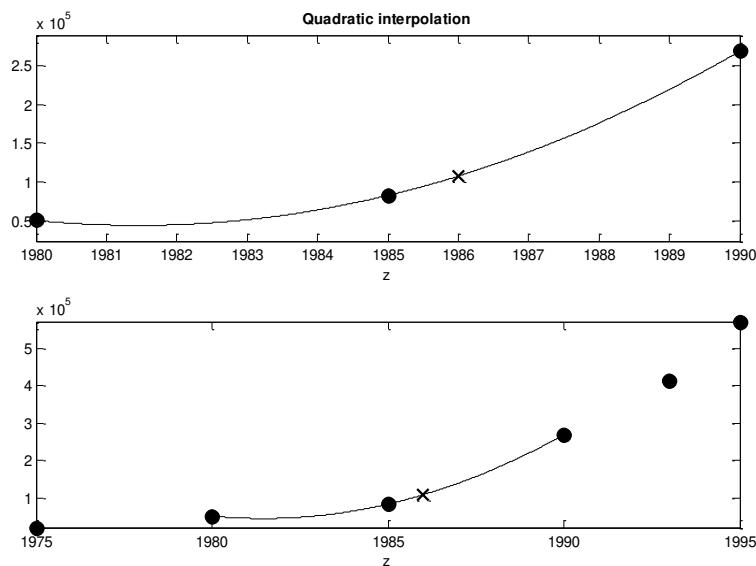
$$e(1990) = a_0 + a_1 (1990) + a_2 (1990)^2 = 268328$$

و بالحل المشترك للمعادلات الثلاثة السابقة نحصل على:

$$a_3 = 3062.96 \quad a_1 = -12138245.4 \quad a_0 = 12025748778$$

و وبالتالي للحصول على الإنفاق المطلوب عند الزمن  $t = 1986$  ، نعرض بالعلاقة المقدرة فنجد:

$$e(1986) = 107993.76$$



الشكل 2 : التمثيل بواسطة كثير حدود من الدرجة 2 و التمديد الداخلي التربيعي لإنفاق عام 1986

### الحالة الثالثة: كثير حدود من الدرجة الثالثة

نعبر عن الإنفاق في حالة التمديد الداخلي بواسطة كثير الحدود من الدرجة الثالثة (بسمى أحياناً التمديد الداخلي التكعيبی Cubic interpolation ) بالمعادلة التالية:

$$e(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

و لأننا نستخدم كثير حدود من الدرجة الثالثة فإننا نختار أربع نقاط فقط من النقاط المعلومة بحيث تكون الأقرب إلى النقطة  $t_1 = 1986$  و تكون النقطة المطلوبة متوضعة فيما بينهم. هذه النقاط هي  $t_0 = 1980$  و  $t_1 = 1985$  و  $t_2 = 1990$  و  $t_3 = 1993$ . وبالتالي

$$e(1980) = a_0 + a_1 (1980) + a_2 (1980)^2 + a_3 (1980)^3 = 51270$$

$$e(1985) = a_0 + a_1 (1985) + a_2 (1985)^2 + a_3 (1985)^3 = 83225$$

$$e(1990) = a_0 + a_1 (1990) + a_2 (1990)^2 + a_3 (1990)^3 = 268328$$

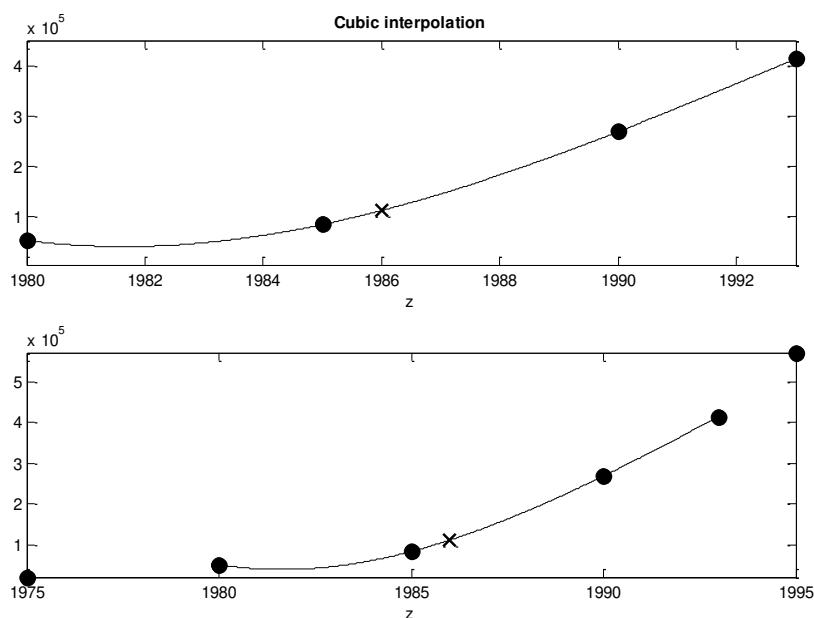
$$e(1993) = a_0 + a_1 (1993) + a_2 (1993)^2 + a_3 (1993)^3 = 413755$$

و بالحل المشترك للمعادلات السابقة نحصل على:

$$a_3 = -125.467 \quad a_2 = 750221.5 \quad a_1 = -1495244891.54 \quad a_0 = 993343828760.3$$

و وبالتالي للحصول على الإنفاق المطلوب عند الزمن  $t = 1986$  ، نعرض بالعلاقة المقدرة فنجد:

$$e(1986) = 111004.986$$



الشكل : 3 التمثيل بواسطة كثير حدود من الدرجة 3 و التمديد الداخلي التكعبي لإنفاق عام 1986

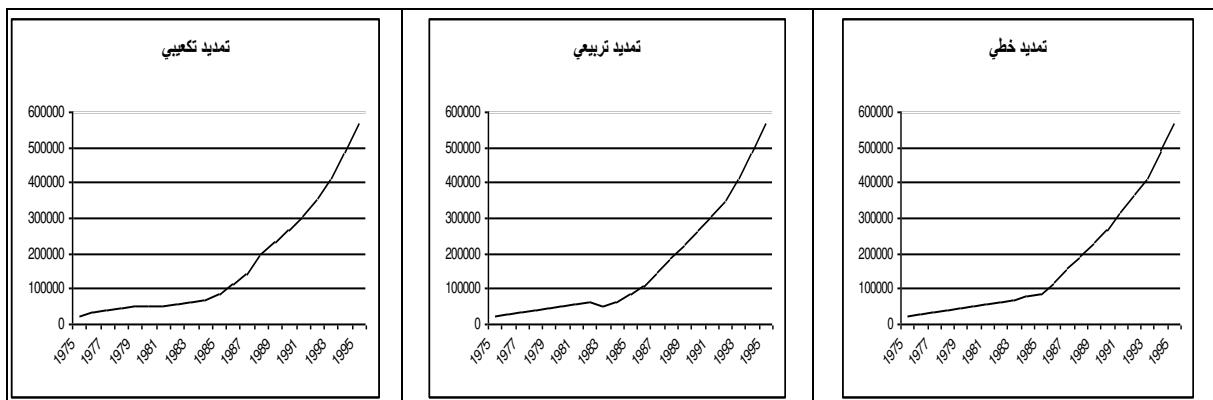
بعد استعراض الطريقة المباشرة للتمديد الداخلي، نعرض الآن نتائج عمليات التمديد الداخلي على كامل بيانات السلسلة الزمنية الممثلة للإنفاق الحكومي على الناتج المحلي الإجمالي في سوريا من عام 1975 إلى عام 1995 وفقاً للحالات الثلاثة المعروضة في المثال السابق (الجدول 2 و الشكل 4).

نلاحظ من خلال هذه النتائج أن أرقام التمديد الداخلي لسلسلة المعطيات متشابهة إلى حد بعيد وأنه مع زيادة درجة كثير الحدود إلى ثلاثة تصبح المعطيات أكثر صلابة و دقة. و مع رغبة الباحث في الحصول على أعلى درجة من الدقة والصقل للبيانات فإن زيادة المستمرة لدرجة كثير الحدود ستؤدي إلى نتائج عكسية تتمثل في تباعد المنحنى الممثل لكثير الحدود عن المنحنى الأصلي للبيانات و هنا تكمن الفائدة من استخدام طريقة دوال الـ Spline.

الجدول 2: التمديد الداخلي للإنفاق على الناتج المحلي الإجمالي باستخدام الطريقة المباشرة

التمديد الداخلي لبيانات الإنفاق على الناتج المحلي الإجمالي باستخدام الطريقة المباشرة			بيانات السلسلة الأصلية	العام
كثير حدود تكعبي	كثير حدود تربيعية	كثير حدود خطية		
		20597	1975	
33918.60	26629.04	26731.6		1976
42431.78	32712.36	32866.2		1977
47351.45	38846.96	39000.8		1978
49892.55	45032.84	45135.4		1979
		51270	1980	
52698.72	57558.44	57661		1981
55393.66	63898.16	64052		1982
60569.73	52065.24	70443		1983

69441.87	64582.16	76834		1984
			83225	1985
111004.98	107993.76	120245.6		1986
144158.08	148674.9	157266.2		1987
199480.47	185695.5	194286.8		1988
232931.86	225579.86	231307.4		1989
			268328	1990
308425.94	304749.93	316803.66		1991
355982.61	353225.6	365279.33		1992
			413755	1993
484500.16	486338.13	492365		1994
			570975	1995



الشكل 4: التمديد الداخلي لـكامل معطيات السلسلة بواسطة كثير الحدود (خطي، تربيعي، تكعبي)

#### • التمديد الداخلي بواسطة دوال الـ Spline

الحالة الأولى: التمديد الداخلي الخطى بواسطة Spline

بالعودة إلى معطيات الجدول 1 و باستخدام طريقة التمديد الداخلي الخطى بواسطة الـ Spline، يتم تحديد قيمة الإنفاق لعام 1986 أي  $t = 1986$  على النحو التالي.

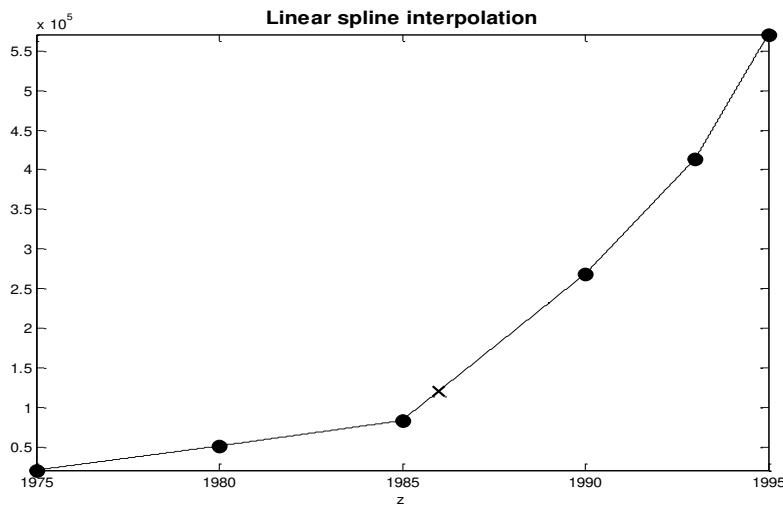
يعطى الإنفاق في حالة التمديد الداخلي الخطى بواسطة الـ Spline بالعلاقة التالية:

$$e(t) = e(t_0) + \frac{e(t_1) - e(t_0)}{t_1 - t_0} (t - t_0)$$

نختار نقطتين فقط من النقاط المعروفة بحيث يكونان الأقرب إلى النقطة  $t = 1986$  و يقعان بجوارها. هاتين

النقطتين هما  $t_0 = 1985$  و  $t_1 = 1990$ . وبالتالي:

$$\begin{aligned} e(t) &= 83225 + \frac{268328 - 83225}{1990 - 1985} (t - 1985) \\ &= -73402666 + 37020.6t \\ e(1986) &= 120245.6 \end{aligned}$$



الشكل 4: التمديد الداخلي الخطي لإنفاق عام 1986 بواسطة دوال الـ Spline

نعرض هنا جميع دوال الـ Spline لكافة المجالات الجزئية و التي تم الحصول عليها باستخدام البرنامج : (Collier, Kaw, 2002) Matlab

$$\begin{aligned} S_1(t) &= -12095238 + 6134.6t & t \in [1975, 1980] \\ S_2(t) &= -12602910 + 6391t & t \in [1980, 1985] \\ S_3(t) &= -73402666 + 37020.6t & t \in [1985, 1990] \\ S_4(t) &= -96198248.6 + 48475.66t & t \in [1990, 1993] \\ S_5(t) &= -156255975 + 78610t & t \in [1993, 1995] \end{aligned}$$

يلاحظ عدم وجود فرق بين هذه الطريقة و طريقة التمديد الداخلي الخطي. فقد استخدمنا في هذه الطريقة البيانات من نقطتين متتاليتين فقط من النقاط المعلومة. و كذلك فان الميل بين هاتين النقطتين أي  $\frac{e(t_1) - e(t_0)}{t_1 - t_0}$

يتغير بشكل مفاجئ عن ميل النقاط الأخرى الواقعه ضمن مجموعة المعطيات، مما يعني عدم الاستمرارية للمشتقة الأولى عند هذه النقاط. لتحسين هذا الوضع فإننا نستخدم دوال Spline التربيعي.

#### الحالة الثانية: التمديد الداخلي التربيعي بواسطة Spline

بالعودة إلى معطيات الجدول 1 و باستخدام طريقة التمديد الداخلي التربيعي بواسطة دوال Spline، يكون تحديد قيمة الإنفاق لعام 1986 أي  $t = 1986$  على الشكل التالي.

بما أنه لدينا ست نقاط من البيانات، يكون عدد دوال الـ Spline هو خمسة.

$$\begin{aligned} e(t) &= a_1 t^2 + b_1 t + c_1, & 1975 \leq t \leq 1980 \\ e(t) &= a_2 t^2 + b_2 t + c_2, & 1980 \leq t \leq 1985 \\ e(t) &= a_3 t^2 + b_3 t + c_3, & 1985 \leq t \leq 1990 \\ e(t) &= a_4 t^2 + b_4 t + c_4, & 1990 \leq t \leq 1993 \\ e(t) &= a_5 t^2 + b_5 t + c_5, & 1993 \leq t \leq 1995 \end{aligned}$$

و يكون عدد المعادلات المطلوبة  $(3n = 3*5 = 15)$  معادلة مقابل 15 معالماً مجهولاً. هذه المعادلات هي التالية:

عند نقطتين  $t = 1975$  و  $t = 1980$  يمر لا Spline التربيعي التالي  $a_1 t^2 + b_1 t + c_1$ , أي لدينا

$$a_1(1975)^2 + b_1(1975) + c_1 = 20597 \quad (1)$$

$$a_1(1980)^2 + b_1(1980) + c_1 = 51270 \quad (2)$$

عند نقطتين  $t = 1980$  و  $t = 1985$  يمر لا Spline التربيعي التالي  $a_2 t^2 + b_2 t + c_2$ , أي لدينا

$$a_2(1980)^2 + b_2(1980) + c_2 = 51270 \quad (3)$$

$$a_2(1985)^2 + b_2(1985) + c_2 = 83225 \quad (4)$$

عند نقطتين  $t = 1985$  و  $t = 1990$  يمر لا Spline التربيعي التالي  $a_3 t^2 + b_3 t + c_3$ , أي لدينا

$$a_3(1985)^2 + b_3(1985) + c_3 = 83225 \quad (5)$$

$$a_3(1990)^2 + b_3(1990) + c_3 = 268328 \quad (6)$$

عند نقطتين  $t = 1990$  و  $t = 1993$  يمر لا Spline التربيعي التالي  $a_4 t^2 + b_4 t + c_4$ , أي لدينا

$$a_4(1990)^2 + b_4(1990) + c_4 = 268328 \quad (7)$$

$$a_4(1993)^2 + b_4(1993) + c_4 = 413755 \quad (8)$$

عند نقطتين  $t = 1993$  و  $t = 1995$  يمر لا Spline التربيعي التالي  $a_5 t^2 + b_5 t + c_5$ , أي لدينا

$$a_5(1993)^2 + b_5(1993) + c_5 = 413755 \quad (9)$$

$$a_5(1995)^2 + b_5(1995) + c_5 = 570975 \quad (10)$$

بالإضافة إلى ذلك، نكتب المعادلات التي تمثل شروط الاستمرارية في المشتقات:

عند  $t = 1980$

$$2a_1(1980) + b_1 - 2a_2(1980) - b_2 = 0 \quad (11)$$

عند  $t = 1985$

$$2a_2(1985) + b_2 - 2a_3(1985) - b_3 = 0 \quad (12)$$

عند  $t = 1990$

$$2a_3(1990) + b_3 - 2a_4(1990) - b_4 = 0 \quad (13)$$

عند  $t = 1993$

$$2a_4(1993) + b_4 - 2a_5(1993) - b_5 = 0 \quad (14)$$

ونحصل على المعادلة الأخيرة من خلال افتراض الخطية لا Spline الأولى:

$$a_1 = 0 \quad (15)$$

و بالكتابة المصفوفاتية، نحصل على الشكل التالي:

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccc|c|c} 1975^2 & 1975 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 1980^2 & 1980 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1980^2 & 1980 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1985^2 & 1985 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1985^2 & 1985 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1990^2 & 1990 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1990^2 & 1990 & 1 & 0 & 0 & 268328 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1993^2 & 1993 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 3960 & 1 & 0 & -3960 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 3970 & 1 & 0 & -3970 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3980 & 1 & 0 & -3980 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3986 & 1 & 0 & -3986 & -1 & b_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 20597 \\ 51270 \\ 51270 \\ 83225 \\ 83225 \\ 268328 \\ 268328 \\ 413755 \\ 413755 \\ 570975 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و بالحل المشترك نحصل على المعاملات التالية:

i	$a_i$	$b_i$	$c_i$
1	0	6134.6	-12095238
2	51.28	-196934.2	188942874
3	6074.64	-24109673.4	23922336529.9
4	-6306.044	25165450.68	-25106411938.44
5	24526.233	-97732008.53	97360906176.49

و بالنتيجة تكون دوال لا Spline على النحو التالي:

$$e(t) = 6134.6t - 12095238, \quad 1975 \leq t \leq 1980$$

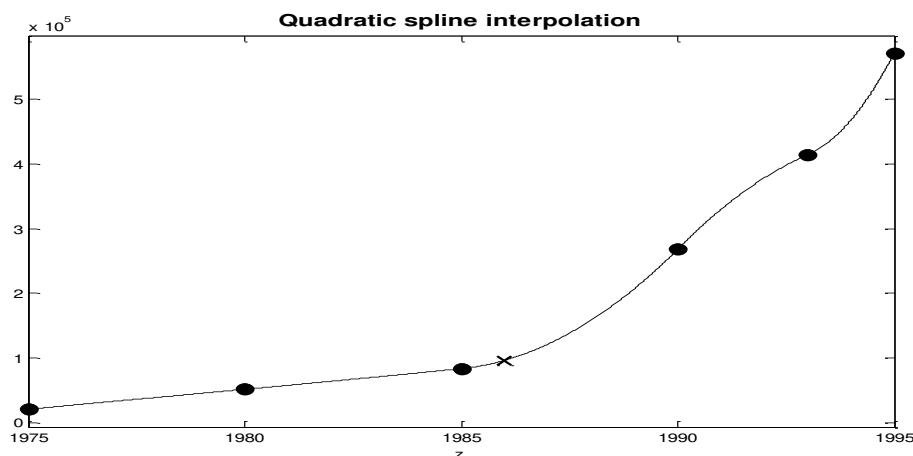
$$e(t) = 51.28t^2 - 196934.2t + 188942874, \quad 1980 \leq t \leq 1985$$

$$e(t) = 6074.64t^2 - 24109673.4t + 23922336529.9, \quad 1985 \leq t \leq 1990$$

$$e(t) = -6306.044t^2 + 25165450.68t - 25106411938.44, \quad 1990 \leq t \leq 1993$$

$$e(t) = 24526.233t^2 - 97732008.53t + 97360906176.49, \quad 1993 \leq t \leq 1995$$

$$e(1986) = 95947.0369 \quad \text{فundenما } t = 1986$$



الشكل 5: التمديد الداخلي التربيعي لإنفاق عام 1986 بواسطة دال Spline

الحالة الثالثة: التمديد الداخلي التكعبي بواسطة Spline

نظراً لتعقيد الحسابات في هذه الحالة، نأخذ أولاً حالة مبسطة تتضمن ثلات نقاط فقط و من ثم نعود لمعطيات التطبيق 1 ونعرض النتائج التي تم الحصول عليها آلياً باستخدام Matlab (Collier, Kaw, 2002). ليكن لدينا النقاط الثلاثة التالية:  $(x_0, y_0)$  ،  $(x_1, y_1)$  ،  $(x_2, y_2)$  هي  $(1,1)$  ،  $(2,5)$  و  $(3,4)$ . و لنحاول أن نبحث عن دالتين من دوال الـ Spline التكعيبية المواتقتين للمجالين الجزئيين التاليين:  $[1,2]$  و  $[2,3]$ . تأخذ هاتين الدالتين الشكلين التاليين:

$$S_0(x) = a_0 x^3 + b_0 x^2 + c_0 x + d_0 \quad x \in [1,2]$$

$$S_1(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 \quad x \in [2,3]$$

عند نقطتين  $x=1$  و  $x=2$  يمر الـ Spline التكعيبية التالي  $S_0(x) = a_0 x^3 + b_0 x^2 + c_0 x + d_0$  ، أي

يكون لدينا

$$S_0(1) = a_0(1)^3 + b_0(1)^2 + c_0(1) + d_0 = 1 \quad (1)$$

$$S_0(2) = a_0(2)^3 + b_0(2)^2 + c_0(2) + d_0 = 5 \quad (2)$$

و عند نقطتين  $x=2$  و  $x=3$  يمر الـ Spline التكعيبية التالي  $S_1(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1$  ،

أي يكون لدينا

$$S_1(2) = a_1(2)^3 + b_1(2)^2 + c_1(2) + d_1 = 5 \quad (3)$$

$$S_1(3) = a_1(3)^3 + b_1(3)^2 + c_1(3) + d_1 = 4 \quad (4)$$

شرط المشتقالجزئي الأول:

عند النقطة الأولى  $[1,2]$ :

$$S'_0(1) = S'_1(1) = 0$$

$$S''_0(1) = S''_1(1) = 0$$

عند النقطة الثانية  $[2,3]$ :

$$S'_0(2) = S'_1(2) = 3a_0 x^2 + 2b_0 x + c_0 = 3a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1$$

$$12a_0 + 4b_0 + c_0 - 12a_1 - 4b_1 - c_1 = 0 \quad (5)$$

$$S''_0(2) = S''_1(2) = 6a_0 x + 2b_0 = 6a_1 x + 2b_1$$

$$12a_0 + 2b_0 - 12a_1 - 2b_1 = 0 \quad (6)$$

و الشروط عند النقاط الطرفية:

$$S''_0(1) = 6a_0 + 2b_0 = 0 \quad (7)$$

$$S''_1(3) = 18a_1 + 2b_1 = 0 \quad (8)$$

لدينا إذن ثمان معادلات و ثمانية مجاهيل. يمكن كتابة المعادلات السابقة بالشكل المصفوفاتي التالي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & -12 & -4 & -1 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & -12 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و بالحل المشترك لهذه المعادلات نحصل على النتائج التالية لقيم المعاملات المطلوبة:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.25 \\ 3.75 \\ 1.50 \\ -3.0 \\ 1.25 \\ -11.25 \\ 31.50 \\ -23.0 \end{pmatrix}$$

و بالتالي فان دالتي دا Spline الموقتين للمجالين الزمنيين تأخذان الشكل التالي:

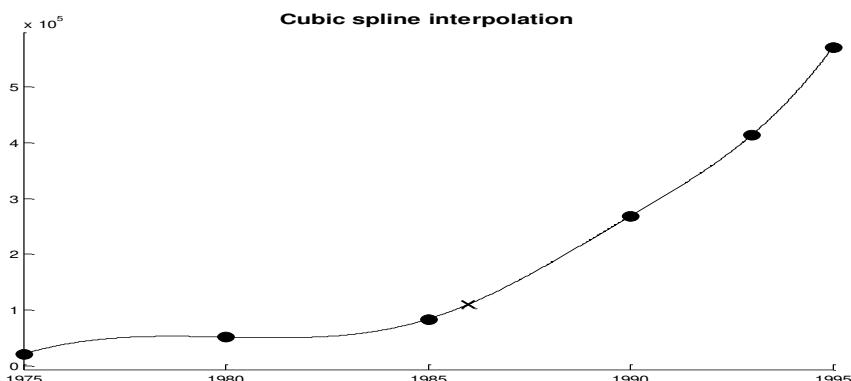
$$S_0(x) = -1.25x^3 + 3.75x^2 + 1.50x - 3.0 \quad x \in [1,2]$$

$$S_1(x) = 1.25x^3 - 11.25x^2 + 31.50x - 23.0 \quad x \in [2,3]$$

ففي حال رغبنا إجراء التمديد الداخلي للقيمة 2.5 على سبيل المثال، فما علينا إلا استخدام دالة دا Spline الثانية و تعويض قيمة  $x$  بالقيمة المطلوبة، أي:

$$S_1(2.5) = 4.96875$$

بالعودة لمعطيات الجدول 1، فإن قيمة الإنفاق لعام 1986 باستخدام دوال دا Spline التكعبي هو 109854.5454. أما نتائج التمديد الداخلي لكامل مفردات السلسلة باستخدام طريقة دا Spline فهي معروضة في الجدول 3 (النتائج تم الحصول عليها باستخدام Matlab).

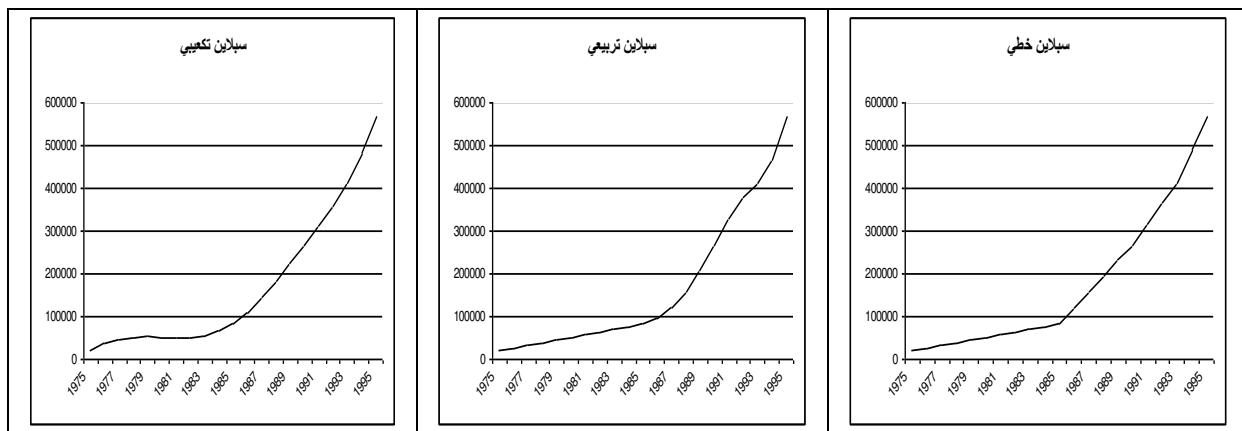


الشكل 6: التمديد الداخلي التكعبي لإنفاق عام 1986 بواسطة دا Spline

الجدول 3: التمديد الداخلي للإنفاق على الناتج المحلي الإجمالي بطريقة دا Spline

التمديد الداخلي لبيانات الإنفاق على الناتج المحلي الإجمالي			بيانات السلسلة الأصلية	العام
سبلاين تكعبي	سبلاين تربعي	سبلاين خطى		
			20597	1975
37950.91	26731.6	26731.6		1976
47808.18	32866.2	32866.2		1977
52055.82	39000.8	39000.8		1978
52580.75	45135.4	45135.4		1979

			51270	1980
50010.52	57455.88	57661		1981
50689.31	63744.32	64052		1982
55193.33	70135.32	70443		1983
65409.57	76628.88	76834		1984
			83225	1985
109854.5	95947.03	120245.6		1986
143824.9	120818.4	157266.2		1987
182990.9	157839	194286.8		1988
225207	207008.8	231307.4		1989
			268328	1990
311397	329415.7	316803.7		1991
358210.9	377891.4	365279.3		1992
			413755	1993
483014.6	467838.8	492365		1994
			570975	1995



الشكل 5: التمديد الداخلي لـ كامل معطيات السلسلة بواسطة الـ Spline (خطي، تربيعي، تكعبي)

من خلال مقارنة النتائج السابقة مع النتائج المعروضة في الجدول 2 و الشكل 4 نلاحظ أن التمديد التربيعي بواسطة الـ Spline يماثل إن لم يكن أفضل من التمديد التكعبي بواسطة الطريقة المباشرة، لذلك ينصح في هذه الحالة بالاكتفاء باستخدام التمديد الداخلي التربيعي للسلسلة الزمنية بواسطة الـ Spline.

#### الاستنتاجات والتوصيات:

تناولت هذه الدراسة عمليات التمديد الداخلي لبيانات السلسلة الزمنية باستخدام طريقتين: الطريقة المباشرة وطريقة دوال الدا Spline. وقد استعنا بمعطيات واقعية تمثل مبالغ الإنفاق الإجمالي السنوي على الناتج المحلي الإجمالي في سوريا للفترة من 1975 إلى 1995. وقد توصلت الدراسة إلى النتائج التالية:

1- أظهرت نتائج تطبيق الطريقتين، المباشرة و الدا Spline، توافقاً تاماً في القيم الممدة داخلياً عند الاعتماد على كثیرات حدود من الدرجة الأولى (تمديد خطى).

2- بيّنت الدراسة أنه مع الانتقال إلى استخدام كثیرات حدود من الدرجة الثانية، ازدادت الفروقات المطلقة النسبية بين التمديد التربيعي والتمديد الخطى للقيم الممدة داخلياً في الطريقة المباشرة عن مثيلاتها في طريقة الدا Spline. مما يعني أن طريقة الدا Spline تعطي نفس النتائج تقريباً دون الضرورة إلى استخدام درجات أعلى في كثير الحدود.

3- أوضحت الدراسة من خلال الرسوم البيانية (الشكلين 4 و 5) أن القيم الممدة داخلياً في طريقة الدا Spline أكثر صقلأً لبيانات الإنفاق الإجمالي من القيم الناتجة باستخدام الطريقة المباشرة وأن الفروقات المطلقة النسبية بين التمديد التكعيبي والتمديد التربيعي في طريقة الدا Spline أعلى جمیعاً من مثيلاتها في الطريقة المباشرة.

4- لم نستطع من خلال هذه الدراسة تبيان أثر ظاهرة رانج التي يستلزم توضيحاً استخدام درجات مرتفعة لكثیرات الحدود (خمسة فما فوق) في حين أكدينا في هذه الدراسة بالدرجة الثالثة فقط نظراً لتعقيد الحسابات المصفوفاتية في الدرجات الأعلى.

توصي نتائج هذه الدراسة باعتماد التمديد الداخلي لبيانات السلسلة الزمنية بواسطة دوال الدا Spline باعتبارها أداة قوية وفعالة لتحليل المعطيات الرقمية. حيث يمكن من خلالها إيجاد ربط بين معطيات السلسلة الزمنية نستطيع من خلاله استبدال القيم الناقصة دون أن يكون هناك أي علاقة تابعية واضحة بين تلك المعطيات.

**المراجع:**

1. AHLBERG, N.; WALSH, J.L. *The theory of Splines and their Applications Mathematics in Science and engineering.* Academic Press, New York, 1967, 104-124.
2. CARL DEBOOR. *A practical Guide to Splines.* Springer, 2001, 5-23.
3. COLLIER, N.; KAW, A. *Spline Method of interpolation,* 2002, 4 Nov. 2008.  
<http://numericalmethods.eng.usf.edu/>.
4. EPPERSON. History of Splines, NA Digest, Vol.98, N<sup>0</sup>. 26, 1998, 26-27.
5. GERALD, C.; WHEATLEY, P. *Applied Numerical Analysis.* Addison-Wesley, 1994, 201-218.
6. HANSELMAN, D.; BRUCE L. *Mastering Matlab 5.* Prentice Hall, New Jersey, 1998, 25-55.
7. KAW, A.; KETELTAS, M. *An interactive e-book for illustrating the Spline method for interpolation.* Holistic Numerical Methods Institute, College of Engineering, University of South Florida, Tampa. 2004, 14 June 2008.  
[http://numericalmethods.eng.usf-edu/ebooks/spline\\_05inp\\_ebook.htm](http://numericalmethods.eng.usf-edu/ebooks/spline_05inp_ebook.htm).
8. MCKINLEY, S.; LEVINE, M. *Cubic Spline Interpolation.* 2004, 4 Nov. 2008.  
<http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/laproj/fall98/SkyMeg/Proj.PDF>.
9. NIEVERGELT, Y. *UMAP: Module 718; Splines in Single and Multivariable Calculus..* Lexington, MA: COMAP. 1993, 1-16.
10. O'NEILL, C. *Cubic Spline Interpolation, MAE 5093, 28 May 2002.*  
<http://www.Caselab.okstate.edu/ocharle/Projects/Cubicspline.PDF>.
11. RORRES, C.; HOWARD A. *Applications of Linear Algebra 3ed.* John Wiley and Sons New York, 1984, 25-36.
12. SANDWELL, D.T. *Biharmonic spline interpolation of GEOS-3 and SEASAT altimeter data.* Geophysical Research Letters, Vol. 14, N<sup>0</sup>. 2, 1987, 139-142.
13. SULI, E.; MAYERS, D.F. *An introduction to Numerical Analysis.* First published, Cambridge University Press, New York, 2003, 429.
14. VAN, L.; CHARLES, F. *Introduction to Scientific Computing.* Prentice Hall, New Jersey, 1997, 85-92.

